

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TARIFICATION DE PRODUITS DÉRIVÉS DANS LE MODÈLE VARIANCE

GAMMA

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

(CONCENTRATION MATHÉMATIQUES ACTUARIELLES ET

FINANCIÈRES)

PAR

JEAN-PHILIPPE DAY MICHAUD

MARS 2014

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement Jean-François Renaud, mon directeur de mémoire à la maîtrise et professeur à l'Université du Québec à Montréal, qui m'a apporté une aide précieuse tout au long de la rédaction par ses commentaires toujours pertinents et ses encouragements. Je le remercie également de m'avoir permis de découvrir le monde de la recherche par le biais d'un stage effectué sous sa supervision alors que j'étudiais au baccalauréat en actuariat à l'Université du Québec à Montréal.

Je remercie les professeurs du département de mathématiques Arthur Charpentier, François Watier et Simon Guillotte ainsi que les professeurs du département de finance Alexandre Roch et Maher Kooli qui ont grandement contribué à ma formation. Je tiens également à remercier tout spécialement Mathieu Boudreault qui m'a donné mon premier cours d'ingénierie financière et qui a grandement contribué à piquer ma curiosité pour ce champ d'études.

Je remercie également Stéphanie Girard, assistante de gestion du programme de maîtrise, Gisèle Legault, analyste de l'informatique, et Manon Gauthier pour leurs soutiens administratifs et techniques ainsi que pour leur amabilité.

Je tiens à remercier l'Institut de finance mathématique de Montréal (IFM2), l'Autorité des marchés financiers et Jean-François Renaud pour leurs généreux supports financiers qui m'ont permis de me consacrer pleinement à mes études.

Enfin, je tiens à remercier vivement ma famille et mes amis pour leurs supports inconditionnels et leurs encouragements tout au long de mes études. Je remercie tout particulièrement ma mère Hélène et André.



## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xi
RÉSUMÉ . . . . .	xiii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
LE PROCESSUS VARIANCE GAMMA . . . . .	3
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Les processus de Lévy . . . . .	3
1.3 Processus Variance Gamma exprimé comme un mouvement brownien subordonné . . . . .	6
1.4 Le processus Variance Gamma exprimé comme la différence de deux processus gamma . . . . .	11
1.5 Activité et variation du processus Variance Gamma . . . . .	13
1.6 Les moments du processus Variance Gamma . . . . .	14
1.7 Le processus Variance Gamma illustré graphiquement . . . . .	16
CHAPITRE II	
LE MODÈLE VARIANCE GAMMA ET LA TARIFICATION D'OPTIONS VANILLE . . . . .	21
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Les modèles et les marchés financiers . . . . .	21
2.3 Le modèle de Black-Scholes . . . . .	23
2.4 Les modèles de Lévy exponentiels . . . . .	24
2.5 Modélisation d'un actif sous-jacent . . . . .	25
2.6 Option européenne . . . . .	29
2.7 Valorisation d'une option d'achat . . . . .	29
2.8 Deux exemples d'applications de la formule semi-analytique : tarification de EIA . . . . .	31
2.8.1 Conception point à point . . . . .	32

2.8.2	Conception cliquet . . . . .	33
CHAPITRE III		
LA MÉTHODE MONTE CARLO APPLIQUÉE AU MODÈLE VARIANCE GAMMA		35
3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	La méthode Monte Carlo . . . . .	35
3.3	Simulation naïve et technique des ponts . . . . .	37
3.4	Simulation naïve du processus Variance Gamma . . . . .	39
3.5	La technique des ponts pour un mouvement brownien . . . . .	41
3.6	La technique des ponts pour un processus gamma . . . . .	42
3.7	Simulation du processus Variance Gamma en utilisant la technique des ponts	44
3.8	Évaluation de lettres grecques . . . . .	44
3.8.1	La méthode des différences finies . . . . .	46
3.8.2	La méthode trajectorielle . . . . .	48
3.8.3	La méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	51
3.8.4	La méthode de Glasserman et Liu (2008) . . . . .	54
CHAPITRE IV		
VALORISATION D'OPTIONS AVEC LES TRANSFORMÉES DE FOURIER		61
4.1	Introduction . . . . .	61
4.2	Propriétés des transformées de Fourier . . . . .	63
4.3	Méthode de Carr <i>et al.</i> (1999) . . . . .	64
4.3.1	Transformée de Fourier pour le prix d'une option . . . . .	64
4.3.2	Erreur de troncature . . . . .	67
4.3.3	Discrétisation . . . . .	68
4.3.4	Application de la méthode dans le modèle Variance Gamma . . . . .	70
4.3.5	Pseudo-code pour appliquer la méthode . . . . .	71
4.3.6	Évaluation de lettres grecques . . . . .	72
4.4	La méthode de convolution . . . . .	73
4.4.1	Introduction à la méthode de convolution . . . . .	73
4.4.2	Notation . . . . .	74
4.4.3	Construction de la méthode . . . . .	75

4.4.4	Troncature . . . . .	78
4.4.5	Ajustement de la grille . . . . .	79
4.4.6	Code de la méthode . . . . .	81
4.5	Résultats numériques . . . . .	83
CONCLUSION . . . . .		91
BIBLIOGRAPHIE . . . . .		93





## LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Densité des log-rendements VG en modifiant les valeurs de $\sigma$ ; $t = 1$ ; $\sigma$ (moyen) = 0.1213, $\sigma$ (bas) = 0.0500, $\sigma$ (haut) = 0.5000; $\nu = 0.1686$ ; $\theta = -0.1436$ ; $r = 0.10$ . . . . .	8
1.2	Densité des log-rendements VG en modifiant les valeurs de $\theta$ ; $t = 1$ ; $\sigma = 0.1213$ ; $\nu = 0.1686$ ; $\theta$ (moyen) = -0.1436, $\theta$ (bas) = -0.3500, $\theta$ (haut) = 0.3500; $r = 0.10$ . . . . .	9
1.3	Densité des log-rendements VG en modifiant les valeurs de $\nu$ ; $t = 1$ ; $\sigma = 0.1213$ ; $\nu$ (moyen) = 0.1686, $\nu$ (bas) = 0.05, $\nu$ (haut) = 1; $\theta = 0$ ; $r = 0.10$	10
1.4	Trajectoire d'un mouvement brownien $\sigma B_t$ sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ avec $\sigma = 0.1213$ . . . . .	17
1.5	Trajectoire d'un processus gamma $\gamma(t; 1, \nu = 0.1686)$ sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ . . . . .	18
1.6	Trajectoire d'un processus Variance Gamma $X(t; \sigma = 0.1213, \nu = 0.1686, \theta = -0.1436)$ sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ . . . . .	19
2.1	Trajectoire d'un actif sous-jacent dans le modèle de Black-Scholes sous la mesure risque-neutre sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ avec $\sigma = 0.1236$ , $r = 0.10$ et $S_0 = 100$ . . . . .	27
2.2	Trajectoire d'un actif sous-jacent dans le modèle Variance Gamma sous la mesure risque-neutre sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ avec $\sigma = 0.1213$ , $\nu = 0.1686$ , $\theta = -0.1436$ , $r = 0.10$ et $S_0 = 100$ . . . . .	28



## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
4.1 Paramètres utilisés pour les tests numériques . . . . .	86
4.2 Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option d'achat européenne dans le modèle de Black-Scholes avec une échéance de $T = 0.1$ , un prix d'exercice $K = 90$ et une valeur de référence de 11.135243124194432 . . . . .	86
4.3 Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option d'achat européenne dans le modèle Variance Gamma avec une échéance de $T = 0.1$ , un prix d'exercice $K = 90$ et une valeur de référence de 10.9937024989088532 . . . . .	86
4.4 Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle de Black-Scholes avec une grille statique, une valeur de référence de 11.987453515745329, une échéance de $T = 1$ , un prix d'exercice de $K = 110$ et $M = 10$ instants d'exercice possibles . . . . .	87
4.5 Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle de Black-Scholes avec une grille dynamique, une valeur de référence de 11.987453515745329, une échéance de $T = 1$ , un prix d'exercice de $K = 110$ et $M = 10$ instants d'exercice possibles . . . . .	87
4.6 Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle Variance Gamma, avec une grille statique, une valeur de référence de 9.040646117341028, une échéance de $T = 1$ , un prix d'exercice de $K = 110$ et $M = 10$ instants d'exercice possibles . . . . .	88
4.7 Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle Variance Gamma avec une grille dynamique, une valeur de référence de 9.040646117341028, une échéance de $T = 1$ , un prix d'exercice de $K = 110$ et $M = 10$ instants d'exercice possibles . . . . .	88

4.8	Analyse de la convergence du prix avec la méthode de convolution en augmentant le nombre d'instants d'exercice pour la tarification d'une option de vente bermudienne dans le modèle Variance Gamma avec une grille statique, un nombre de points sur la grille de $N = 2^{12}$ , une échéance de $T = 1$ et un prix d'exercice de $K = 110$ . . . . .	89
-----	--	----

## RÉSUMÉ

La tarification de produits dérivés dans le modèle Variance Gamma est étudiée. Les aspects théoriques concernant le processus Variance Gamma sont d'abord étudiés. Ensuite, la tarification de produits dérivés européens est présentée. Puis, on décrit des techniques de simulation qui permettront d'obtenir les prix d'options exotiques ainsi que d'évaluer les sensibilités de ces options par rapport à leurs paramètres. Finalement, on présente des techniques faisant intervenir des transformées de Fourier rapides pour la tarification de produits dérivés. La technique de Carr *et al.* (1999) permet de tarifier des options européennes très efficacement pour de nombreux prix d'exercice simultanément, alors que la méthode de convolution permet de tarifier des options à dates d'exercices multiples, appelées options bermudiennes. Cette dernière technique permet aussi d'obtenir les prix de droits américains.



## INTRODUCTION

L'objectif de ce mémoire est de présenter des techniques efficaces pour tarifier des produits dérivés dans le modèle Variance Gamma. Ce modèle est un cas particulier de la famille des processus de Lévy exponentiels, ceux-ci étant très intéressants pour leurs applications financières notamment parce qu'ils permettent de bien modéliser les caractéristiques empiriques des marchés financiers et aussi parce qu'ils possèdent des propriétés probabilistes intéressantes. Deux méthodes sont utilisées en parallèle pour tarifier des produits dérivés : des méthodes de Monte Carlo et des méthodes numériques faisant intervenir des transformées de Fourier rapides (FFT). Les méthodes Monte Carlo vont se montrer très utiles puisqu'elles ont l'avantage de nous donner la possibilité de tarifier de nombreux produits relativement facilement, mais au coût d'une rapidité déficiente. Pour cette raison, on se tourne vers les méthodes faisant intervenir des FFT qui disposent de très grandes précision et rapidité.

Le chapitre 1 présente le processus Variance Gamma en détail du point de vue stochastique seulement. Dans le chapitre 2, le modèle Variance Gamma ainsi que la tarification de produits dérivés européens sont étudiés. Dans le chapitre 3, la méthode de Monte Carlo appliquée à la tarification de produits dérivés est analysée. Différentes techniques de simulation du processus Variance Gamma sont décrites et le chapitre se termine avec la présentation de différentes techniques utiles à l'évaluation de la sensibilité par rapport aux paramètres de certains produits dérivés, dont des options exotiques. Finalement, dans le chapitre 4, on présente deux techniques pour tarifier des produits dérivés, celles-ci faisant intervenir des FFT. La première technique, celle de Carr *et al.* (1999), permet de tarifier des options européennes très efficacement pour de nombreux prix d'exercice simultanément. On montre également comment ajuster la méthode pour obtenir des sensibilités par rapport aux paramètres. La deuxième technique appelée méthode de



convolution permet de tarifer avec une grande efficacité, encore une fois, des options à dates d'exercices multiples, appelées options bermudiennes. Notre objectif avec cette méthode est également de tarifer des droits américains. Ce dernier chapitre se conclut avec une analyse pratique de cette dernière méthode.

## CHAPITRE I

### LE PROCESSUS VARIANCE GAMMA

#### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente des notions sur les processus de Lévy et, en particulier, le processus Variance Gamma est étudié. Ce chapitre ne traite donc pas de l'application du processus à la modélisation financière. On définit d'abord un processus de Lévy et le théorème de Lévy-Khintchine est ensuite présenté. On définit ensuite le processus Variance Gamma et on présente ses différentes écritures. La distribution, l'activité, la variation, le coefficient d'asymétrie et le kurtosis du processus sont également étudiés.

#### 1.2 Les processus de Lévy

On définit maintenant un processus de Lévy et on énonce certains théorèmes qui permettront de mieux comprendre le processus Variance Gamma. Pour une couverture plus complète de la théorie sur les processus de Lévy avec des applications financières, on suggère les ouvrages de Schoutens (2003) et de Cont et Tankov (2003). Cette sous-section est d'ailleurs construite à partir des fondements théoriques de ces ouvrages. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré.

**Définition 1.** *Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy si*

1.  $X_0 = 0$ , presque sûrement ;
2.  $X$ , adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , possède des accroissements indépendants, c'est-à-dire que

- $X_t - X_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  pour tout  $0 \leq s < t$  ;
3.  $X$  possède des accroissements stationnaires, c'est-à-dire que  $X_t - X_s$  a la même distribution que  $X_{t-s}$  pour tout  $0 \leq s < t$  ;
4.  $X$  est un processus continu à droite avec limite à gauche (càdlàg), presque sûrement.

La fonction caractéristique d'un processus de Lévy est complètement définie par le théorème de Lévy-Khintchine.

**Théorème 1.** Si  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy, alors sa fonction caractéristique, pour  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , satisfait la relation suivante :

$$\mathbb{E} [e^{iuX_t}] = \exp \left( iuat - \frac{1}{2}u^2\sigma^2t + t \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbb{I}_{|x|<1}) \Pi(dx) \right). \quad (1.1)$$

où  $a \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \geq 0$ . La mesure de Lévy  $\Pi$  est une mesure sur  $\mathbb{R}$  qui satisfait

$$\Pi(\{0\}) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \Pi(dx) < \infty. \quad (1.2)$$

Ce processus peut être caractérisé par ce qu'on appelle un triplet de Lévy  $(a, \sigma^2, \Pi)$ , où  $a$  est un terme linéaire,  $\sigma^2$  est le coefficient de diffusion et  $\Pi$  est la mesure de Lévy. Deux propositions faisant intervenir la mesure de Lévy sont maintenant présentées. La première permet d'évaluer si un processus de Lévy possède une activité finie ou infinie, c'est-à-dire de savoir si le nombre de sauts sur tout intervalle de temps compact est fini ou infini. La seconde permet d'évaluer si les trajectoires d'un processus de Lévy sont à variation finie ou infinie.

**Proposition 1.** Soit  $X$  un processus de Lévy avec le triplet  $(a, \sigma^2, \Pi)$ .

1. Si  $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$ , alors, presque sûrement, les trajectoires de  $X$  possèdent un nombre fini de sauts sur tout intervalle de temps compact. Dans ce cas, le processus de Lévy possède une activité finie.
2. Si  $\Pi(\mathbb{R}) = \infty$ , alors, presque sûrement, les trajectoires de  $X$  possèdent un nombre infini de sauts sur tout intervalle de temps compact. Dans ce cas, le processus de Lévy possède une activité infinie.

**Proposition 2.** Soit  $X$  un processus de Lévy avec le triplet  $(a, \sigma^2, \Pi)$ .

1. Si  $\sigma^2 = 0$  et  $\int_{|x|<1} |x|\Pi(dx) < \infty$ , alors presque toutes les trajectoires de  $X$  sont à variation finie.
2. Si  $\sigma^2 \neq 0$  ou  $\int_{|x|<1} |x|\Pi(dx) = \infty$ , alors presque toutes les trajectoires de  $X$  sont à variation infinie.

**Exemple 1.** Soit  $(B)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard. La mesure de Lévy  $\Pi(dx)$  d'un tel processus est nulle, ce qui implique que le processus ne comporte pas de sauts et que l'activité du processus est finie. Étant donné que  $\sigma^2 \neq 0$ , la variation du processus est infinie. Sans utiliser la proposition 1, on peut déduire que l'activité d'un mouvement brownien est nulle étant donné qu'il s'agit d'un processus continu par définition et, donc, ne comportant aucun saut.

**Exemple 2.** Soit  $(N)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$ . Le triplet de Lévy d'un tel processus est de  $(0, 0, \lambda\delta(1))$ , où  $\delta(1)$  est la mesure de Dirac au point 1. Il s'agit d'un processus à sauts sans composante de diffusion, ce qui explique que  $\sigma^2 = 0$ . L'intégrale de la mesure de Lévy est finie, ce qui fait en sorte que l'activité du processus est finie et, puisque  $\sigma^2 = 0$  en plus, la variation du processus est finie.

**Exemple 3.** Soit  $(G)_{t \geq 0}$  un processus gamma. La densité d'un tel processus à un instant fixé  $t$  est donnée par une loi gamma (voir l'équation (1.4) pour la fonction de densité) de paramètres  $\alpha t > 0$  et  $\beta$ . Le triplet de Lévy de ce processus issu de 0 est de  $(\alpha(1 - e^{-\beta})/\beta, 0, \alpha e^{-\beta g} g^{-1} \mathbb{I}_{g>0} dg)$ . On vérifie facilement que l'intégrale du processus est infinie, ce qui implique que l'activité du processus est infinie. Par ailleurs,  $\sigma^2 = 0$ , ce qui signifie qu'il s'agit d'un processus de sauts et on a aussi que l'intégrale sur l'intervalle  $|g| < 1$  du processus de Lévy est finie, ce qui implique que la variation du processus est finie.

### 1.3 Processus Variance Gamma exprimé comme un mouvement brownien subordonné

Un processus Variance Gamma peut être défini en évaluant un mouvement brownien avec dérive à un instant aléatoire donné par un processus gamma. Soit

$$b(t; \theta, \sigma) = \theta t + \sigma B_t, \quad (1.3)$$

où  $(B)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard. Le processus  $b(t; \theta, \sigma)$  est donc un mouvement brownien avec dérive  $\theta$  et volatilité  $\sigma$ . Avant de présenter le processus gamma, la distribution gamma  $G(\alpha, \beta)$ , où  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , est rappelée :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0, \quad (1.4)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma. On retrouve facilement l'espérance  $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$  et la variance  $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$ . La fonction caractéristique de la distribution gamma est la suivante :

$$M_X(u) = \mathbb{E}[\exp(iuX)] = \left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Un processus gamma  $\gamma(t; \mu, \nu)$  avec des taux de moyenne  $\mu$  et de variance  $\nu$  est un processus de Lévy dont la densité d'un accroissement  $\gamma(t+h; \mu, \nu) - \gamma(t; \mu, \nu)$  sur un intervalle de temps  $(t, t+h)$  est celle d'une distribution gamma d'espérance  $\mu h$  et de variance  $\nu h$  :

$$f_{\gamma(h)}(g) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 h}{\nu}} \frac{g^{\frac{\mu^2 h}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{\mu}{\nu} g\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 h}{\nu}\right)}, \quad g > 0. \quad (1.6)$$

En utilisant la paramétrisation de l'équation (1.4), on obtient une densité gamma  $G\left(\frac{\mu^2 h}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}\right)$ . On trouve donc que la distribution gamma paramétrisée en fonction de  $\mu$  et  $\nu$  a la fonction caractéristique suivante :

$$\mathbb{E}[\exp(iu\gamma(t; \mu, \nu))] = \left(\frac{1}{1 - iu\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\mu^2 t}{\nu}}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (1.7)$$

Un processus Variance Gamma  $(X(t; \sigma, \nu, \theta))_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy pouvant être défini comme un mouvement brownien subordonné avec dérive  $b(t; \sigma, \nu, \theta)$  pour lequel

l'indice de temps suit un processus gamma  $\gamma(t; 1, \nu)$  :

$$\begin{aligned} X(t; \sigma, \nu, \theta) &= b(\gamma(t; 1, \nu); \sigma, \nu, \theta) \\ &= \theta \gamma(t; 1, \nu) + \sigma B_{\gamma(t; 1, \nu)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le paramètre  $\sigma$  est le coefficient de volatilité du mouvement brownien. Par ailleurs, le paramètre  $\theta$  modifie le coefficient d'asymétrie et le paramètre  $\nu$  modifie le coefficient d'aplatissement. Pour illustrer ces propos, on montre les densités de log-rendements en changeant un paramètre et en gardant les autres constants. Cependant, les densités montrées sont celles d'un processus Variance Gamma auquel on a ajouté un terme de dérive constant, ce qui permet d'illustrer des densités de log-rendements calibrées à partir de données financières. Les densités sont basées sur le modèle de la section 2.5, ce qui signifie que les densités présentées sont celles de

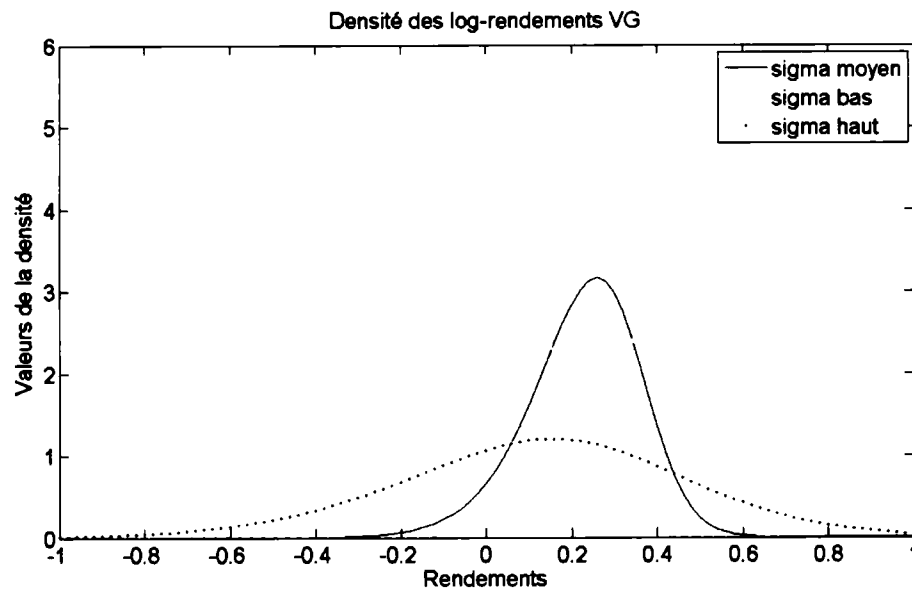
$$\log(S_t/S_0) = (r - \omega)t + X_t, \quad (1.9)$$

où  $r - \omega$  est le terme de dérive constant et  $X_t$  représente toujours le processus Variance Gamma. Les figures 1.1, 1.2 et 1.3 illustrent les changements dans la distribution pour les paramètres  $\sigma$ ,  $\theta$  et  $\nu$  respectivement. Les paramètres sont tirés de Madan *et al.* (1998) et ont été obtenus à partir d'une calibration avec les prix de contrats sur le S&P 500 sur la période de janvier 1992 à septembre 1994. On note cependant que pour le graphique 1.3, on fixe  $\theta = 0$  pour obtenir une distribution symétrique et ainsi isoler l'effet de  $\nu$  sur le l'aplatissement de la distribution.

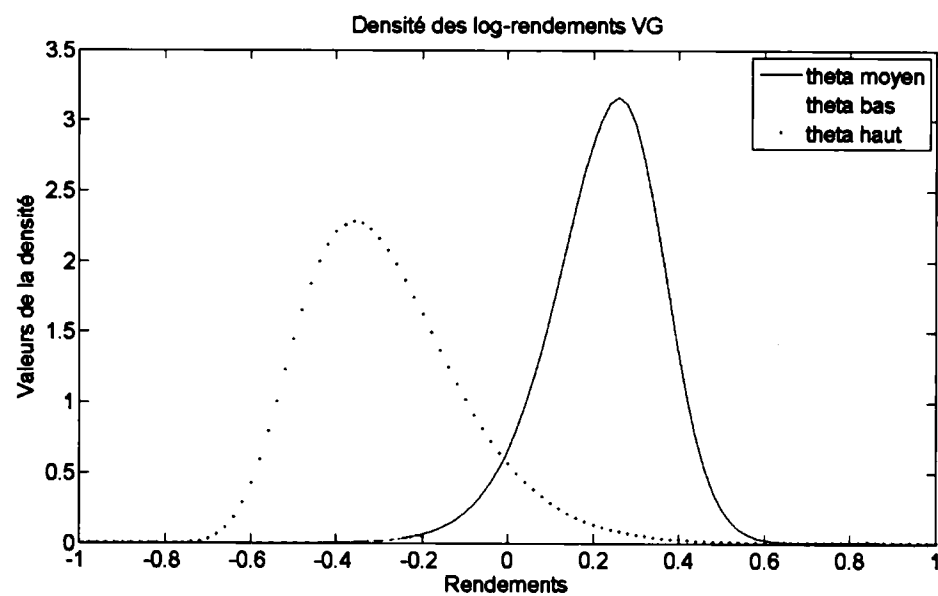
Une autre propriété intéressante du processus est que pour un instant  $t$  fixé, la distribution du processus Variance Gamma  $f_{X_t}(x)$  peut être exprimée conditionnellement à la réalisation d'un temps  $g$  suivant une distribution gamma, ce qui permet de retrouver la loi normale. En effet,  $X_t | \gamma(t; 1, \nu) = g$  suivant une loi normale d'espérance  $\theta g$  et de variance  $\sigma^2 g$ , la distribution de  $X_t$  peut être exprimée de la façon suivante :

$$f_{X_t}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x - \theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} dg. \quad (1.10)$$

On note que la densité (1.10) peut être représentée d'une façon alternative en utilisant une fonction de Bessel modifiée du second type. Cependant, cette écriture n'est pas utile

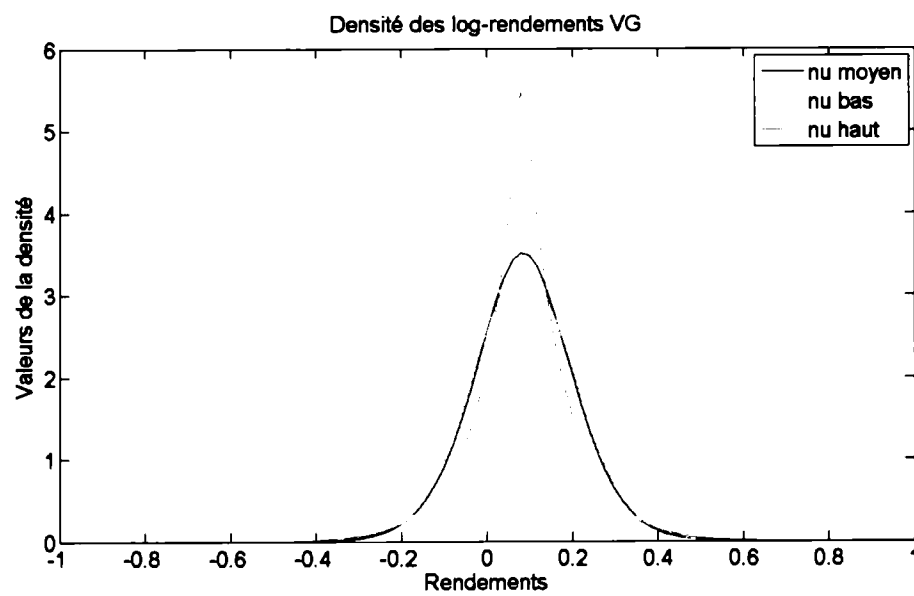


**Figure 1.1** Densité des log-rendements VG en modifiant les valeurs de  $\sigma$ ;  $t = 1$ ;  $\sigma$  (moyen) = 0.1213,  $\sigma$  (bas) = 0.0500,  $\sigma$  (haut) = 0.5000;  $\nu = 0.1686$ ;  $\theta = -0.1436$ ;  $r = 0.10$



**Figure 1.2** Densité des log-rendements VG en modifiant les valeurs de  $\theta$ ;  $t = 1$ ;  $\sigma = 0.1213$ ;  $\nu = 0.1686$ ;  $\theta$  (moyen) =  $-0.1436$ ,  $\theta$  (bas) =  $-0.3500$ ,  $\theta$  (haut) =  $0.3500$ ;  $r = 0.10$





**Figure 1.3** Densité des log-rendements VG en modifiant les valeurs de  $\nu$ ;  $t = 1$ ;  $\sigma = 0.1213$ ;  $\nu$  (moyen) = 0.1686,  $\nu$  (bas) = 0.05,  $\nu$  (haut) = 1;  $\theta = 0$ ;  $r = 0.10$

dans le cadre du mémoire. On réfère à Madan *et al.* (1998) pour l'obtention de l'écriture alternative. Pour ce qui est de la fonction caractéristique de  $X_t$ , elle est calculée en conditionnant la loi à un certain temps aléatoire  $g$ , ce qui permet d'utiliser le résultat connu de la fonction caractéristique d'une loi normale. Voici les détails, pour  $u \in \mathbb{R}$  et  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(iuX_t)] &= \int_0^\infty \mathbb{E}[\exp(iuX_t) | \gamma(t; 1, \nu) = g] \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} dg \\ &= \int_0^\infty \exp(iu\theta g - u^2\sigma^2 g/2) \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} dg \\ &= \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{1}{\gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-g\left(\frac{1}{\nu} - iu\theta + u^2\sigma^2/2\right)\right) g^{\frac{t}{\nu}-1} dg.\end{aligned}\quad (1.11)$$

En posant,  $\beta^* = \frac{1}{\nu} - iu\theta + u^2\sigma^2/2$  et  $\alpha^* = \frac{t}{\nu}$ , on retrouve la distribution gamma paramétrisée selon l'équation (1.4), ce qui permet de résoudre l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(iuX_t)] &= \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\alpha^*} \frac{1}{\gamma(\alpha^*)} \frac{\gamma(\alpha^*)}{(\beta^*)^{\alpha^*}} \int_0^\infty \frac{(\beta^*)^{\alpha^*}}{\gamma(\alpha^*)} g^{\alpha^*-1} e^{-\beta^* g} dg \\ &= \left[ \frac{1}{1 - iu\theta\nu + u^2\sigma^2\nu/2} \right]^{\frac{t}{\nu}}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

#### 1.4 Le processus Variance Gamma exprimé comme la différence de deux processus gamma

Un processus Variance Gamma peut également être exprimé comme étant la différence de deux processus gamma indépendants, ce qui revient à dire que

$$X(t; \sigma, \nu, \theta) = \gamma(t; \mu_p, \nu_p) - \gamma(t; \mu_n, \nu_n). \quad (1.13)$$

Pour trouver les paramètres qui font en sorte que l'équation (1.13) est satisfaite, la fonction caractéristique est utilisée. On cherche donc les paramètres qui font en sorte que l'équation suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(iuX_t)] &= \mathbb{E}[\exp(iu(\gamma(t; \mu_p, \nu_p) - \gamma(t; \mu_n, \nu_n)))] \\ &= \mathbb{E}[\exp(iu\gamma(t; \mu_p, \nu_p))] \cdot \mathbb{E}[\exp(-iu\gamma(t; \mu_n, \nu_n))] \\ &= \left(\frac{1}{1 - iu\frac{\nu_p}{\mu_p}}\right)^{\frac{\mu_p^2 t}{\nu_p}} \left(\frac{1}{1 + iu\frac{\nu_n}{\mu_n}}\right)^{\frac{\mu_n^2 t}{\nu_n}}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

En posant la dernière ligne de l'équation (1.14) égale à la fonction caractéristique de  $X_t$  en (1.12), le problème revient à résoudre le système d'équation suivant :

$$\frac{\mu_p^2}{\nu_p} = \frac{\mu_n^2}{\nu_n} = \frac{1}{\nu}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\nu_p \nu_n}{\mu_p \mu_n} = \frac{\sigma^2 \nu}{2}, \quad (1.16)$$

$$\frac{\nu_p}{\mu_p} - \frac{\nu_n}{\mu_n} = \theta \nu. \quad (1.17)$$

Ce système peut facilement être résolu :

$$\mu_p = \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} + \frac{\theta}{2}, \quad (1.18)$$

$$\mu_n = \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} - \frac{\theta}{2}, \quad (1.19)$$

$$\nu_p = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} + \frac{\theta}{2} \right)^2 \nu, \quad (1.20)$$

$$\nu_n = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} - \frac{\theta}{2} \right)^2 \nu. \quad (1.21)$$

Le processus de l'équation (1.13) peut également être exprimé en utilisant une paramétrisation similaire à celle de l'équation (1.4). En effet, on peut définir un processus gamma  $G(t; \alpha, \beta)$  comme étant un processus possédant la distribution suivante à un temps  $t$  :

$$f_{G(t; \alpha, \beta)}(x) = \frac{\beta^{\alpha t}}{\Gamma(\alpha t)} x^{\alpha t - 1} e^{-\beta x}, \quad x > 0. \quad (1.22)$$

On retrouve donc une loi gamma  $G(\alpha t, \beta)$ . On note que pour cette représentation, la paramétrisation de l'équation (1.22) est employée et on utilise la notation  $G(t; \alpha, \beta)$  pour désigner un processus gamma.

Pour trouver les paramètres sous la nouvelle paramétrisation, il suffit d'utiliser les résul-

tats de (1.18), (1.19), (1.20) et (1.21) et de poser

$$\alpha_p = \frac{\mu_p^2}{\nu_p}, \quad (1.23)$$

$$\alpha_n = \frac{\mu_n^2}{\nu_n}, \quad (1.24)$$

$$\beta_p = \frac{\mu_p}{\nu_p}, \quad (1.25)$$

$$\beta_n = \frac{\mu_n}{\nu_n}, \quad (1.26)$$

pour trouver que

$$\alpha_p = \frac{1}{\nu}, \quad (1.27)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\nu}, \quad (1.28)$$

$$\beta_p = \frac{2}{\left(\sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} + \theta\right)\nu}, \quad (1.29)$$

$$\beta_n = \frac{2}{\left(\sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} - \theta\right)\nu}. \quad (1.30)$$

Sous cette paramétrisation et en prenant  $\alpha = \alpha_n = \alpha_p$ , le processus Variance Gamma peut donc être exprimé de la façon suivante :

$$X_t = G^+(t; \alpha, \beta_p) - G^-(t; \alpha, \beta_n). \quad (1.31)$$

On remarque aussi que sous la nouvelle paramétrisation du processus Variance Gamma de l'équation (1.22), le nombre de paramètres est maintenant de trois comparativement à celle de l'équation (1.13) qui en nécessitait quatre.

### 1.5 Activité et variation du processus Variance Gamma

La mesure de Lévy d'un processus Variance Gamma admet une densité qui n'est pas une densité de probabilité et peut directement être écrite comme étant

$$\Pi(dx) = k_X(x)dx = \frac{\exp(\theta x/\sigma^2)}{\nu|x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}|x|}{\sigma}\right) dx. \quad (1.32)$$

Cette mesure peut être intégrée pour vérifier qu'il s'agit d'un processus à activité infinie :

$$\Pi(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} k_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\theta x/\sigma^2)}{\nu|x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}}{\sigma}|x|\right) dx = \infty. \quad (1.33)$$

Étant donné que le processus possède une intégrale infinie, selon la proposition (1), l'activité du processus est infinie et, alors, sur tout intervalle de temps le processus Variance Gamma possède un nombre infini de sauts.

On peut aussi vérifier que le processus est à variation finie. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{|x|<1} |x|\Pi(dx) &= \int_{|x|<1} |x|k_X(x)dx = \int_{-1}^1 |x| \frac{\exp(\theta x/\sigma^2)}{\nu|x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}}{\sigma}|x|\right) dx \\ &= \frac{1}{\nu} \int_{-1}^1 \exp\left(\theta x/\sigma^2 - \frac{\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}}{\sigma}|x|\right) dx \\ &= \frac{1}{\nu} \left( \int_{-1}^0 e^{\left(\theta/\sigma^2 + \frac{\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}}{\sigma}\right)x} dx + \int_0^1 e^{\left(\theta/\sigma^2 - \frac{\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}}{\sigma}\right)x} dx \right) \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Puisque le processus Variance Gamma ne possède pas de composante de diffusion, alors, selon la proposition (2), le processus Variance Gamma est un processus à variation finie.

## 1.6 Les moments du processus Variance Gamma

Les moments du processus Variance Gamma peuvent être calculés analytiquement. Il est intéressant de les obtenir étant donné qu'ils permettent de trouver le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement de la distribution. Rappelons que, si  $X$  est une variable aléatoire d'espérance  $a$  et de variance  $b^2$ , alors

$$\text{Coefficient d'asymétrie} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-a}{b}\right)^3\right] = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3ab^2 - a^3}{b^3}, \quad (1.35)$$

$$\text{Kurtosis} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-a}{b}\right)^4\right] = \frac{\mathbb{E}[X^4] - 4a\mathbb{E}[X^3] + 3a^4 + 6a^2b^2}{b^4}. \quad (1.36)$$

Les quatre premiers moments sont donc dérivés en conditionnant sur la réalisation d'un temps aléatoire suivant une loi gamma. On fixe  $t > 0$  et soit  $X_t = \theta g + \sigma B_g$ , où  $g = \gamma(t; 1, \nu)$ , le premier moment de  $X_t$  est

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t|g]] \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta g + \sigma \sqrt{g}Z|g]] \\
 &= \mathbb{E}[\theta g] \\
 &= \theta t
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

où  $Z$  est une variable aléatoire suivant une loi normale standard. Soit  $Y_t = X_t - \mathbb{E}[X_t]$ , alors, on peut écrire l'égalité en loi suivante :

$$Y_t|g \stackrel{L}{=} \theta(g - t) + \sigma \sqrt{g}Z. \tag{1.38}$$

Le deuxième moment centré est

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_t^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_t^2|g]] \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\theta(g - t) + \sigma \sqrt{g}Z)^2|g]] \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta^2(g - t)^2 + \sigma^2 g Z^2 + 2\theta(g - t)\sigma \sqrt{g}Z|g]] \\
 &= \mathbb{E}[\theta^2(g - t)^2 + \sigma^2 g Z^2] \\
 &= \mathbb{E}[\theta^2 g^2 + (\sigma^2 - 2\theta^2 t)g + \theta^2 t^2] \\
 &= \theta^2(\nu t + t^2) + \sigma^2 t - 2\theta^2 t + \theta^2 t^2 \\
 &= (\theta^2 \nu + \sigma^2)t.
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

En utilisant la même procédure, on trouve que le troisième moment centré est

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_t^3] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_t^3|g]] \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta^3(g - t)^3 + 3\theta^2(g - t)^2\sigma \sqrt{g}Z + 3\theta(g - t)\sigma^2 g Z^2 + \sigma^3 g^{3/2}Z^3|g]] \\
 &= \theta^3 \mathbb{E}[(g - t)^3] + 3\sigma^2 \theta \nu t \\
 &= \theta^3 \mathbb{E}[g^3 - 3g^2 t + 3g t^2 - t^3] + 3\sigma^2 \theta \nu t \\
 &= \theta^3(t^3 + 3\nu t^2 + 2\nu^2 t) - 3\theta^3 t(\nu t + t^2) + 3\theta^3 t^3 - \theta^3 t^3 + 3\sigma^2 \theta \nu t \\
 &= 2\theta^3 \nu^2 t + 3\sigma^2 \theta \nu t.
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Le résultat du troisième moment d'une loi gamma a été utilisée dans l'équation (1.40). Autrement dit, on a utilisé le fait que  $\mathbb{E}[g^3] = t^3 + \nu t^2 + \nu^2 t$ ; on rappelle que  $g = \gamma(t; 1, \nu)$ . Pour trouver le quatrième moment centré, il faut développer  $Y_t^4|g$  et trouver le résultat de cette espérance conditionnelle, ce qui donne comme résultat

$$\mathbb{E}[Y_t^4] = \theta^4 + 6\sigma^2\theta^2\mathbb{E}[(g - t)^2g] + 3\sigma^4\mathbb{E}[g^2]. \quad (1.41)$$

En utilisant le fait que  $\mathbb{E}[g^4] = 6\nu^3t + 11\nu^2t^2 + 6\nu t^3 + t^4$ , on trouve que

$$\mathbb{E}[Y_t^4] = (3\sigma^4\nu + 12\sigma^2\theta^2\nu^2 + 6\theta^4\nu^3)t + (3\sigma^4 + 6\sigma^2\theta^2\nu + 3\theta^4\nu^2)t^2. \quad (1.42)$$

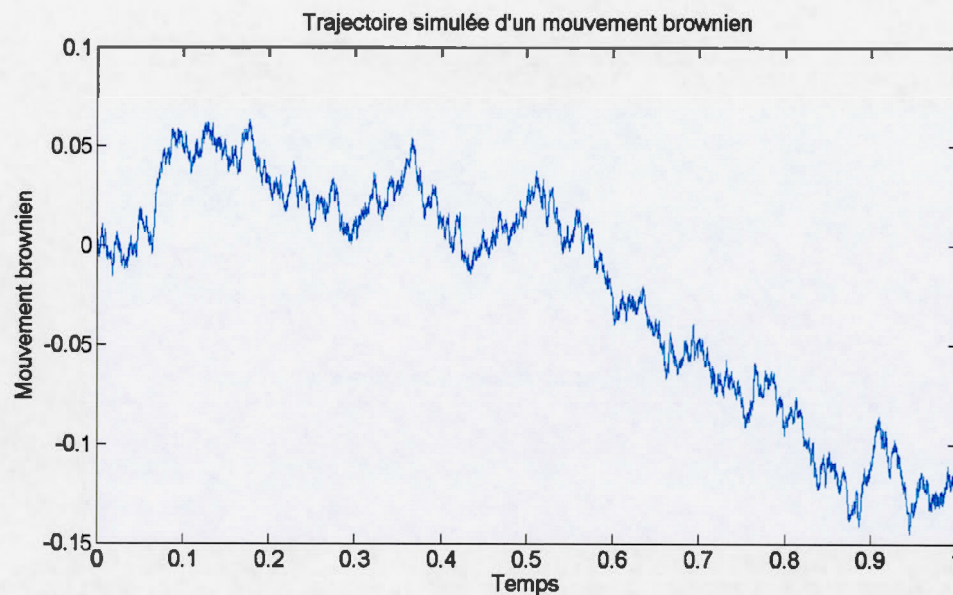
On peut maintenant écrire le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement du processus Variance Gamma comme étant

$$\text{Coefficient d'asymétrie} = \frac{(2\theta^3\nu^2 + 3\sigma^2\theta\nu)}{(\theta^2\nu + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}, \quad (1.43)$$

$$\text{Kurtosis} = \frac{(3\sigma^4\nu + 12\sigma^2\theta^2\nu^2 + 6\theta^4\nu^3) + (3\sigma^4 + 6\sigma^2\theta^2\nu + 3\theta^4\nu^2)t}{(\theta^2\nu + \sigma^2)^4t^3}. \quad (1.44)$$

## 1.7 Le processus Variance Gamma illustré graphiquement

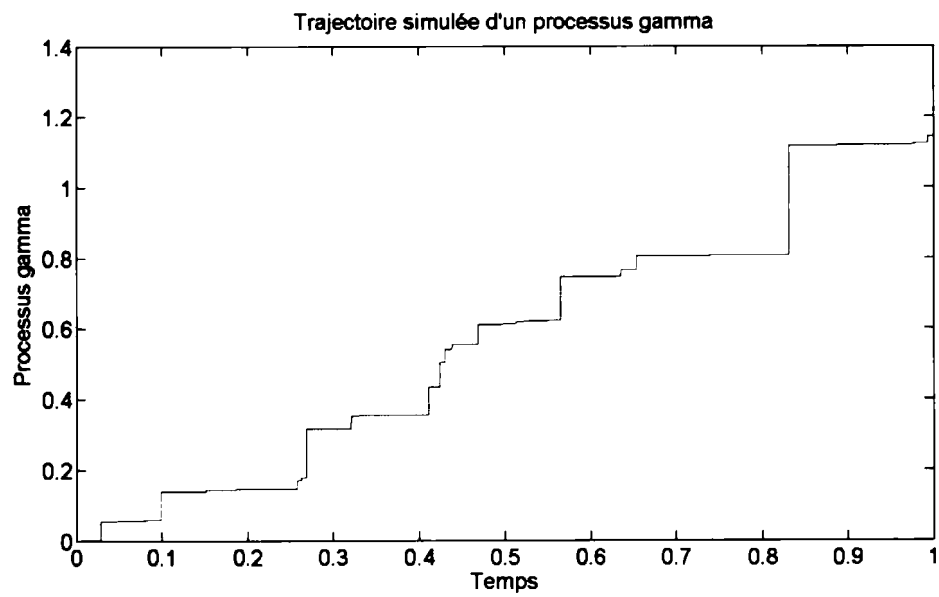
Le mouvement brownien et le processus Variance Gamma sont deux processus très différents, le premier possédant des trajectoires continues et le second des trajectoires discontinues. La figure 1.4 représente une trajectoire simulée d'un mouvement brownien et on remarque que le processus ne comporte pas de sauts sur la trajectoire. Sur tout intervalle de temps aussi petit soit-il, tel que montré dans la section 1.5, il existe un nombre infini de sauts pour toute trajectoire d'un processus Variance Gamma. La figure 1.6 illustre ce phénomène, on peut d'ailleurs apercevoir de nombreux sauts assez importants. Cependant, à certains endroits de la trajectoire, visuellement, il ne semble pas y avoir de sauts ou de mouvements du processus. Si on effectuait un zoom sur un intervalle de temps très petit, on pourrait distinguer la présence de ces sauts qui échappent à notre oeil. La 1.5 illustre une trajectoire d'un processus gamma. Étant donné qu'il s'agit d'un processus qui subordonne un mouvement brownien, ce processus se doit d'être croissant et on peut observer que la trajectoire simulée est bien croissante. Intuitivement, en utilisant la représentation du processus Variance Gamma comme un mouvement brownien



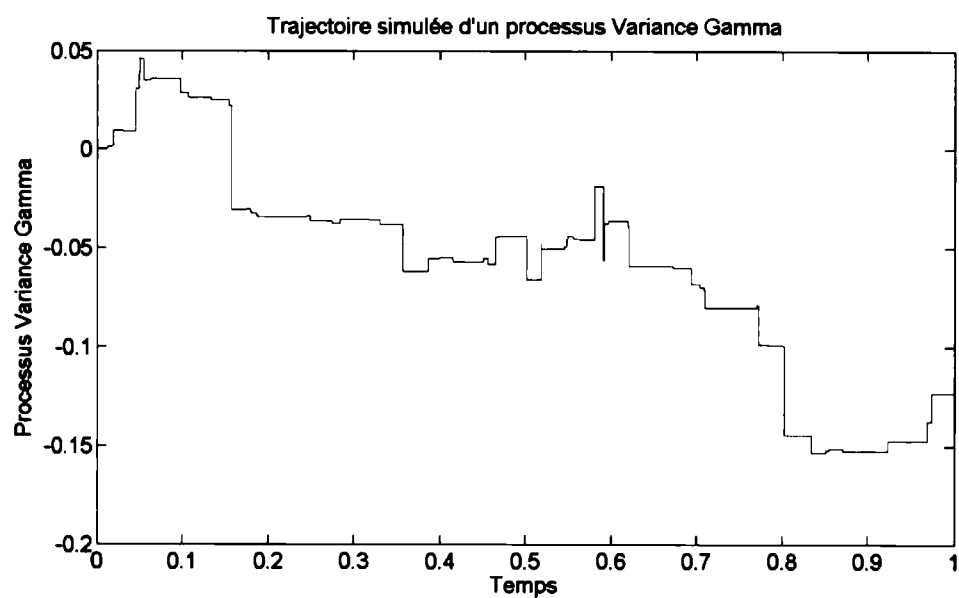
**Figure 1.4** Trajectoire d'un mouvement brownien  $\sigma B_t$  sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$  avec  $\sigma = 0.1213$

subordonné, le processus gamma modifie la vitesse écoulée du temps. La trajectoire simulée se comporte parfois plus rapidement qu'un temps déterministe et parfois moins rapidement. En rappelant que la différence de deux processus gamma est un processus Variance Gamma, on note que le fait que le processus gamma soit croissant fait en sorte que le processus Variance Gamma n'est pas croissant.





**Figure 1.5** Trajectoire d'un processus gamma  $\gamma(t; 1, \nu = 0.1686)$  sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$



**Figure 1.6** Trajectoire d'un processus Variance Gamma  $X(t; \sigma = 0.1213, \nu = 0.1686, \theta = -0.1436)$  sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$



## CHAPITRE II

### LE MODÈLE VARIANCE GAMMA ET LA TARIFICATION D'OPTIONS VANILLE

#### 2.1 Introduction

On présente d'abord les hypothèses qui doivent être posées avant la tarification d'un produit dérivé, soit les hypothèses de marché et la sélection d'un modèle pour représenter des actifs financiers. Une brève présentation du modèle de Black-Scholes et des modèles de Lévy exponentiels est ensuite effectuée. On présente également le modèle Variance Gamma, le modèle utilisé pour la suite du mémoire, un modèle utilisant le processus Variance Gamma pour modéliser des actifs financiers. Par la suite, on montre comment Madan *et al.* (1998) ont réussi à obtenir une formule semi-analytique pour une option d'achat européenne, une des options les plus simples sur les marchés financiers. Ce résultat peut ensuite être appliqué à d'autres types de produits financiers émis par des assureurs tels que les annuités liées à un actif, mieux connues sous le nom de *Equity Indexed Annuities* (EIA).

#### 2.2 Les modèles et les marchés financiers

La modélisation d'actifs financiers, des taux d'intérêt et d'autres phénomènes est utile pour la valorisation de produits dérivés sur ceux-ci, leur couverture, le calcul de la valeur à risque (VaR) et la gestion des risques. Ces modèles proposent de modéliser les actifs financiers par des processus stochastiques, ce qui constitue donc une première hypothèse.

Peu importe le modèle proposé, il est à noter que celui-ci ne permettra jamais de refléter parfaitement les nombreuses caractéristiques des marchés. Cependant, certains modèles sont meilleurs que d'autres, soit par leurs qualités de modélisation intrinsèques ou de par la facilité avec laquelle il est possible de tarifier des produits dérivés. Il est donc nécessaire de faire des compromis lors du choix d'un modèle. Un autre aspect de la modélisation est que la structure du marché est complexe, ce qui implique qu'il est nécessaire de poser des hypothèses pour proposer un marché dit *sans friction* adaptable à un modèle mathématique. Les hypothèses généralement acceptées telles qu'énoncées dans Schoutens (2003) sont les suivantes :

- Les coûts de transaction associés à la vente ou à l'achat d'un actif sous-jacent sont nuls ;
- Les prix d'achat et de vente d'un même produit dérivé sont les mêmes (pas de *bid-ask spread*) ;
- Les actifs financiers sont parfaitement liquides ;
- Il n'y pas d'impôt associé aux positions financières ;
- Il n'est pas nécessaire d'utiliser un compte de marge ;
- Il n'y a pas de restrictions sur les ventes à découvert ;
- Il n'y a aucun délai pour exécuter une transaction.

Lorsqu'on fait référence à un actif financier, il pourrait s'agir d'une action ou encore d'un indice. Il est également nécessaire de proposer un modèle pour l'actif sans risque. On suppose donc qu'il existe un compte bancaire sans risque doté d'un taux d'intérêt déterministe. De nombreux modèles incorporent un taux d'intérêt stochastique suivant généralement un processus stochastique doté d'une propriété de retour à la moyenne, ce qui permet de se prémunir contre de forts mouvements irréalistes des taux d'intérêt et de les faire osciller autour d'un niveau préétabli. Dans le but de simplifier l'analyse, il a cependant été décidé de ne pas travailler avec des taux d'intérêt stochastiques.

### 2.3 Le modèle de Black-Scholes

Le modèle utilisé comme référence lorsqu'on le compare à d'autres modèles est le modèle de Black-Scholes, modèle dans lequel la dynamique de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique. Ce modèle a été proposé par Black et Scholes (1973) et Merton (1973) pour la tarification d'une option d'achat européenne. Ce modèle ne représente cependant pas suffisamment bien les caractéristiques du marché pour des raisons que nous énoncerons.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré. On suppose un marché *sans friction* composé de deux actifs financiers, soit un compte bancaire  $C = (C_t = e^{rt})_{t \geq 0}$  rémunéré à un taux sans risque et déterministe ainsi qu'un actif risqué  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  modélisé par un mouvement brownien géométrique. On suppose donc que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 = x, \quad (2.1)$$

où  $\mu$  est le taux de moyenne et  $\sigma$  est le taux de volatilité. Ce modèle est souvent utilisé par les praticiens pour des raisons de simplicité. En effet, il existe de nombreux résultats intéressants dans le modèle permettant de tarifier aisément des produits dérivés. Par exemple, le prix d'une option d'achat européenne  $C_t(S_t, K, T - t)$  de prix d'exercice  $K$  et de maturité  $T$  peut être facilement trouvé et on obtient le résultat suivant :

$$C_t(S_t, K, T - t) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2), \quad (2.2)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + 0.5\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - 0.5\sigma^2(T - t), \quad (2.3)$$

où  $N(\cdot)$  représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Les log-rendements de l'actif sous-jacent suivent une loi normale, une distribution limitant beaucoup la possibilité de modéliser certaines caractéristiques des marchés, particulièrement la modélisation de valeurs extrêmes. Un autre fait largement documenté est que lorsqu'on calcule la volatilité implicite d'options vanilles, à l'aide de la formule de Black-Scholes, pour différents prix d'exercice sur les marchés financiers, il est possible de distinguer un effet appelé le *smile* de volatilité. Sur les marchés financiers, les données

sur les prix de différentes options ayant un même actif sous-jacent sont disponibles. Par exemple, il pourrait s'agir d'options d'achat ayant des prix d'exercice et des échéances différentes sur un titre boursier. À partir de ces prix observés, il est possible de calculer la volatilité qui aurait été utilisée dans le modèle de Black-Scholes pour tous les prix disponibles. Théoriquement, si le modèle de Black-Scholes est valide, la volatilité devrait être égale pour tous les prix. En effet, la volatilité est un paramètre propre au modèle et ne devrait pas être modifié par le paiement des options. Cependant, empiriquement, on observe que pour différents prix d'exercice et différentes échéances, la volatilité n'est pas la même. On observe aussi que la distribution empirique des rendements possède des ailes plus relevées que ce que la loi normale permet de modéliser et que le coefficient d'asymétrie de la distribution empirique est négatif alors que la loi normale est symétrique. Pour une discussion plus détaillée sur les imperfections du modèle Black-Scholes et la pertinence de la modélisation à l'aide de processus de Lévy, on réfère à Schoutens (2003).

## 2.4 Les modèles de Lévy exponentiels

Pour corriger les défauts du modèle de Black-Scholes, de nombreux modèles ont été proposés dont les modèles basés sur des processus de Lévy. Contrairement à la distribution normale, ces modèles permettent une flexibilité beaucoup plus importante qu'un modèle basé sur une loi normale tel que celui de Black-Scholes. Il est cependant important de noter que le modèle de Black-Scholes est un cas particulier de la famille des processus de Lévy exponentiels, le modèle étant basé sur un mouvement brownien, un processus de Lévy. Les modèles de Lévy exponentiels sont souvent appelés des modèles de diffusion avec sauts (*Jump-Diffusion Models*) dans la littérature. Cette appellation vient du fait que de nombreux modèles tels que les modèles de Merton (1976) ou de Kou (2002) ajoutent un processus de Poisson composé au modèle de Black-Scholes. Cette façon de procéder peut être interprétée intuitivement. La plupart du temps, l'actif sous-jacent ne subit pas de fortes variations, mais il est possible que l'arrivée de nouvelles (favorables ou défavorables) cause un mouvement soudain, un saut (à la hausse ou à la baisse).

L'idée du processus étudié dans le mémoire est complètement différente. Le processus Variance Gamma est un processus de sauts pur (*Pure Jump Process*) ne comportant aucune diffusion.

Par rapport au modèle de Black-Scholes, le modèle Variance Gamma possède l'avantage d'offrir un plus grand contrôle sur le coefficient d'aplatissement et le coefficient d'asymétrie, ces quantités étant fixes pour une loi normale (un coefficient d'aplatissement de 3 et un coefficient d'asymétrie nul). Le coefficient d'aplatissement permet d'accorder un poids plus important aux valeurs extrêmes de la distribution, autant pour les ailes de gauche et de droite. Le coefficient d'asymétrie permet quant à lui de modéliser l'asymétrie de la distribution et d'ainsi accorder un poids différent aux ailes de la gauche et de la droite. Le modèle Variance Gamma est donc une alternative au modèle de Black-Scholes permettant un meilleur ajustement aux données empiriques ; voir l'article de Madan *et al.* (1998) pour une analyse statistique du modèle. On rappelle que les effets des paramètres sont illustrés dans la section 1.3, notamment dans les figures 1.1, 1.2 et 1.3. L'effet du *smile* de volatilité est aussi beaucoup moins important dans le modèle Variance Gamma.

En ce qui concerne l'estimation de paramètres, dans le modèle de Black-Scholes, seule la volatilité doit être estimée pour des fins de tarification. Dans le modèle Variance Gamma, il y a trois paramètres à estimer, ce qui rend l'estimation plus ardue, mais ce nombre de paramètres est moindre que pour des modèles de diffusion avec sauts.

## 2.5 Modélisation d'un actif sous-jacent

La dynamique utilisée pour la modélisation est présentée sous les mesures réelle et risque-neutre. Considérons d'abord un actif sous-jacent  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ . Pour un processus de Lévy  $L = (L_t)_{t \geq 0}$ , on définit la dynamique de l'actif sous-jacent sous la mesure risque-neutre comme étant

$$S_t = S_0 \exp(rt + L_t - \omega t), \quad (2.4)$$

où  $r$  est un taux d'intérêt constant composé de façon continue et  $\omega$  est une constante faisant en sorte que la valeur actualisée de l'actif sous-jacent soit une martingale. On



peut montrer que  $\omega = \log(\mathbb{E}[\exp(L_1)])$ . En effet, pour que la condition martingale soit respectée sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , il faut nécessairement que

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r} S_1] \\ &= e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_0 \exp(r + L_1 - \omega)] \\ &= S_0 e^{-\omega} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\exp(L_1)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En isolant  $\omega$ , on trouve que  $\omega = \log(\mathbb{E}[\exp(L_1)])$ . Dans le cas particulier du modèle Variance Gamma, on a que

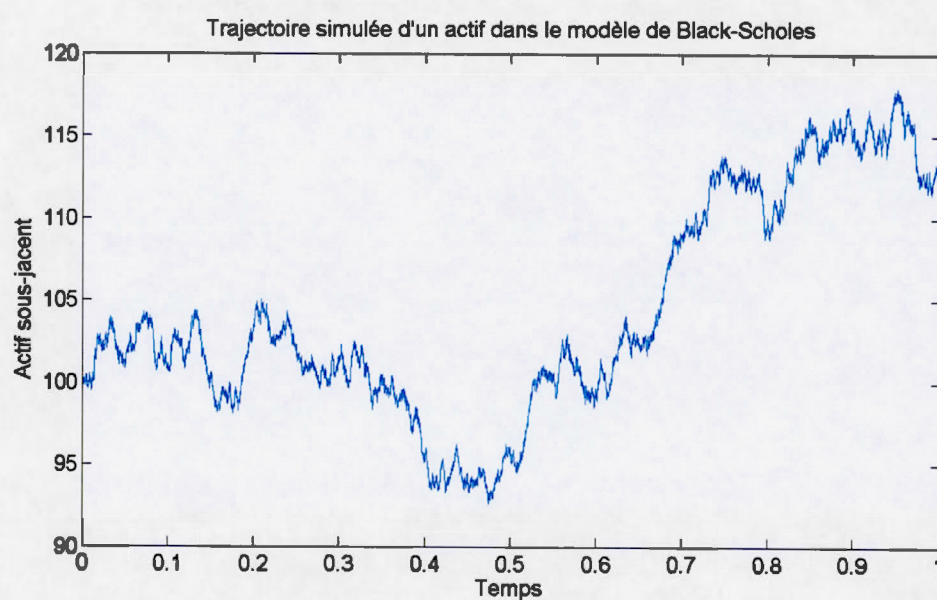
$$S_t = S_0 \exp(rt + X_t^* - \omega^* t), \quad (2.6)$$

sous une mesure risque-neutre où  $X_t^* = X(t; \sigma^*, \nu^*, \theta^*) = \theta^* \gamma(t; 1, \nu^*) + \sigma^* B_{\gamma(t; 1, \nu^*)}$  est un processus Variance Gamma et  $\omega^* = -\frac{1}{\nu^*} \log(1 - \theta^* \nu^* - (\sigma^*)^2 \nu^* / 2)$ . L'étoile (\*) en exposant sur les paramètres signifie qu'il s'agit de paramètres pris sous une mesure risque-neutre. Il est important de noter que le marché est incomplet et qu'il existe donc une infinité de mesures risque-neutre. On suppose une mesure risque-neutre directement sans effectuer de changement de mesure. On peut aussi définir le processus sous la mesure réelle et dans ce cas,

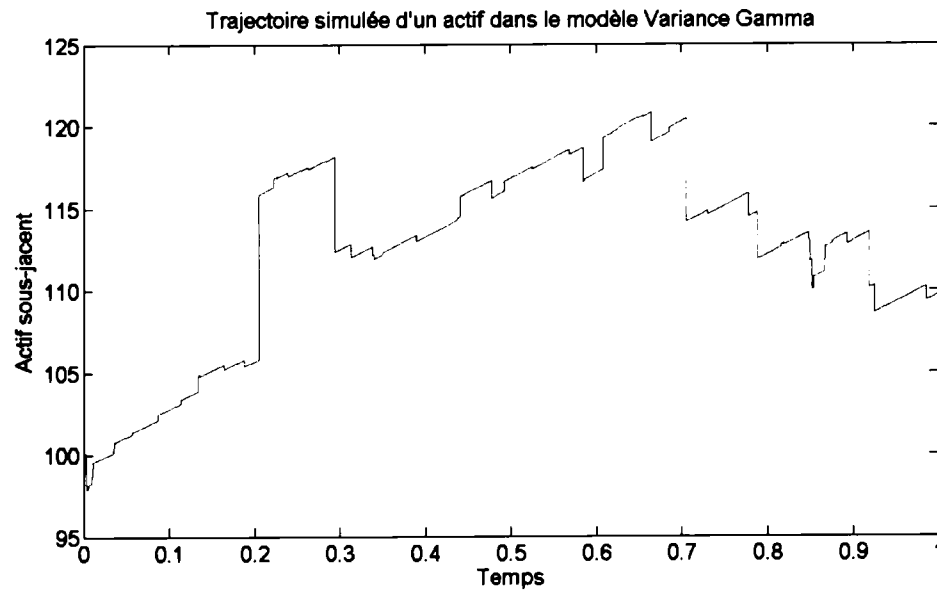
$$S_t = S_0 \exp(mt + X_t - \omega t), \quad (2.7)$$

où  $X_t = X(t; \sigma, \nu, \theta) = \theta \gamma(t; 1, \nu) + \sigma B_{\gamma(t; 1, \nu)}$  est un processus Variance Gamma,  $m$  est le rendement moyen de l'actif, la constante  $\omega$  fait en sorte que l'espérance de  $S_t$  est  $S_0 \exp(mt)$  et  $\omega = -\frac{1}{\nu} \log(1 - \theta \nu - \sigma^2 \nu / 2)$ .

Pour conclure cette section, on présente deux exemples de trajectoires d'un actif sous-jacent. Sur les figures 2.1 et 2.2, on retrouve des trajectoires simulées dans les modèles de Black-Scholes et Variance Gamma respectivement. Comme dans la section 1.3, les paramètres sont tirés de Madan *et al.* (1998) et ont été obtenus à partir d'une calibration avec les prix de contrats sur le S&P 500 sur la période de janvier 1992 à septembre 1994. Étant donné que les paramètres sont calibrés à partir de prix de contrats, les paramètres sont ceux sous la mesure risque-neutre. Il aurait également été possible d'évaluer les paramètres à partir de séries chronologiques de la valeur de l'actif sous-jacent, ce qui nous aurait donné les paramètres sous la mesure réelle.



**Figure 2.1** Trajectoire d'un actif sous-jacent dans le modèle de Black-Scholes sous la mesure risque-neutre sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$  avec  $\sigma = 0.1236$ ,  $r = 0.10$  et  $S_0 = 100$



**Figure 2.2** Trajectoire d'un actif sous-jacent dans le modèle Variance Gamma sous la mesure risque-neutre sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$  avec  $\sigma = 0.1213$ ,  $\nu = 0.1686$ ,  $\theta = -0.1436$ ,  $r = 0.10$  et  $S_0 = 100$

## 2.6 Option européenne

Dans le modèle Variance Gamma et en notant  $\tau = T - t$ , on peut écrire que pour tout  $t \in [0, T)$ , la valeur  $V_t(S_t, T)$  d'une option européenne, de paiement à l'échéance  $H(S_T)$ , est de

$$\begin{aligned}
 V_t(S_t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} H(S_T) | \mathcal{F}_t] \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H(x \exp((r - \omega)(T - t) + X_T - X_t))] \Big|_{x=S_t} \\
 &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H(x \exp((r - \omega)\tau + X_\tau))] \Big|_{x=S_t} \\
 &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ H \left( \frac{x}{S_0} S_\tau \right) \right] \Big|_{x=S_t}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

La deuxième égalité vient que le processus de prix est markovien et la dernière égalité vient du fait que  $X_T - X_t \stackrel{L}{=} X_{T-t}$  puisque les accroissements du processus sont stationnaires. Par ailleurs, il est possible d'utiliser la distribution conditionnelle  $X_\tau | \gamma(\tau; 1, \nu) = g$ , ce qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
 V_t(S_t, T) &= \int_0^\infty \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau} H(S_t \exp((r - \omega)\tau + X_\tau)) | (\gamma(\tau; 1, \nu) = g), \mathcal{F}_t] f_{\Gamma_\tau}(g) dg \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau} H(S_t \exp((r - \omega)\tau + \theta g + \sigma B_g)) | \mathcal{F}_t] f_{\Gamma_\tau}(g) dg.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

## 2.7 Valorisation d'une option d'achat

La valeur d'une option d'achat européenne  $C_t(S_t, K, T)$  dont la valeur de l'actif sous-jacent est de  $S_t$ , le prix d'exercice est de  $K$  et l'échéance est de  $T$  s'écrit comme l'espérance sous la mesure risque-neutre suivante :

$$C_t(S_t, K, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t]. \tag{2.10}$$

La prochaine étape pour évaluer la valeur d'une option d'achat consiste à estimer

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau} H(S_t \exp((r - \omega)\tau + \theta g + \sigma B_g)) | \mathcal{F}_t], \tag{2.11}$$

lorsque le paiement  $H(S_T)$  est le suivant :

$$H(S_T) = \max(S_T - K, 0). \tag{2.12}$$

On remarque que la dynamique

$$S_t \exp((r - \omega)\tau + \theta g + \sigma B_g) = S_t^* \exp(\theta g + B_g), \quad S_t^* = S_t \exp((r - \omega)\tau) \quad (2.13)$$

est similaire à la dynamique du modèle de Black-Scholes dont la solution sous la mesure risque-neutre est généralement écrite de la façon suivante :

$$S_t \exp((r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma B_\tau). \quad (2.14)$$

On peut donc trouver une formule du type Black-Scholes pour trouver le prix conditionnel de l'option dans le modèle Variance Gamma. Le prix conditionnel de l'option d'achat est le suivant :

$$\begin{aligned} & e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( S_t e^{(r-\omega)\tau + X_\tau} - K \right)_+ \mid \gamma(\tau; 1, \nu) = g \right] \\ &= S_t^* e^{-r\tau + \theta g + \sigma^2/2} N \left( \frac{\log(S_t^*/K) + (\theta + \sigma^2)g}{\sigma\sqrt{g}} \right) - K e^{-r\tau} N \left( \frac{\log(S_t^*/K) + \theta g}{\sigma\sqrt{g}} \right) \\ &= S_t e^{\omega\tau + \theta g + \sigma^2/2} N \left( \frac{\log(S_t e^{(r-\omega)\tau}/K) + (\theta + \sigma^2)g}{\sigma\sqrt{g}} \right) \\ &\quad - K e^{-r\tau} N \left( \frac{\log(S_t e^{(r-\omega)\tau}/K) + \theta g}{\sigma\sqrt{g}} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

où la fonction  $N(\cdot)$  représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite. Pour obtenir le prix, il faut ensuite intégrer par rapport à la variable aléatoire  $g$  :

$$C_t(S_t, K, T) = \int_0^\infty e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( S_t e^{(r-\omega)\tau + X_\tau} - K \right)_+ \mid \gamma(\tau; 1, \nu) = g \right] \frac{g^{\tau/\nu-1} e^{-g/\nu}}{\nu^{\tau/\nu} \Gamma(\tau/\nu)} dg. \quad (2.16)$$

Madan *et al.* (1998) ont réussi à trouver une formule semi-fermée pour cette intégrale en faisant appel à des « fonctions spéciales ». Leur résultat est le suivant :

$$\begin{aligned} C_t(S_t, K, T) &= S_t \Psi \left( d \sqrt{\frac{1-c_1}{\nu}}, (\alpha + s) \sqrt{\frac{\nu}{1-c_1}}, \frac{\tau}{\nu} \right) \\ &\quad - K e^{-r\tau} \Psi \left( d \sqrt{\frac{1-c_2}{\nu}}, \alpha s \sqrt{\frac{\nu}{1-c_2}}, \frac{\tau}{\nu} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

où

$$d = \frac{1}{s} \left( \log \left( \frac{S_t}{K} \right) + r\tau + \frac{\tau}{\nu} \log \left( \frac{1 - c_1}{1 - c_2} \right) \right), \quad (2.18)$$

et

$$\alpha = \frac{-\theta}{\sigma \sqrt{1 + \left( \frac{\theta}{\sigma} \right)^2 \frac{\nu}{2}}}, \quad (2.19)$$

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \left( \frac{\theta}{\sigma} \right)^2 \frac{\nu}{2}}}, \quad (2.20)$$

$$c_1 = \frac{\nu(\alpha + s)^2}{2}, \quad (2.21)$$

$$c_2 = \frac{\nu\alpha^2}{2}. \quad (2.22)$$

La fonction  $\Psi(a, b, \gamma)$  peut être représentée à l'aide de la fonction de Bessel modifiée du deuxième type et de la fonction hypergéométrique dégénérée à deux variables :

$$\begin{aligned} \Psi(a, b, \gamma) = & \frac{c^{\gamma+0.5} e^{\text{sign}(a)c(1+u)\gamma}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma} \cdot K_{\gamma+0.5}(c) \Phi \left( \gamma, 1-\gamma, 1+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u) \right) \\ & - \text{sign}(a) \frac{c^{\gamma+0.5} e^{\text{sign}(a)c(1+u)^{1+\gamma}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)(1+\gamma)} \cdot K_{\gamma-0.5}(c) \Phi \left( 1+\gamma, 1-\gamma, 2+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u) \right) \\ & + \text{sign}(a) \frac{c^{\gamma+0.5} e^{\text{sign}(a)c(1+u)\gamma}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma} \cdot K_{\gamma-0.5}(c) \Phi \left( \gamma, 1-\gamma, 1+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u) \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $c = |a|\sqrt{2+b^2}$  et  $u = \frac{b}{2+b^2}$ . La fonction dégénérée à deux variables peut être représentée comme étant l'intégrale suivante :

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} e^{uy} du. \quad (2.24)$$

La fonction de Bessel modifiée du deuxième type peut être représentée par l'intégrale suivante :

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (2z)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t^2 + z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} dt. \quad (2.25)$$

## 2.8 Deux exemples d'applications de la formule semi-analytique : tarification de EIA

On effectue maintenant la tarification de deux EIA (*Equity Indexed Annuities*), soit un EIA de conception point à point et de conception cliquet. Il s'agit de produits d'inves-

tissement dont le rendement est lié à un indice de référence tel qu'un indice boursier ou un fonds mutuel. Ces produits s'accompagnent également de rendements minimums garantis sur la période, ce qui permet à l'investisseur de participer à la croissance des marchés et de limiter le risque de subir des pertes importantes. On suit les méthodes proposées dans Jaimungal (2004).

### 2.8.1 Conception point à point

Une EIA de type point à point permet à l'investisseur de bénéficier de rendements minimums garantis  $x$  pour un investissement  $\beta$  arrivant à échéance à  $T$ , mais également de participer au rendement des marchés financiers si ceux-ci sont supérieurs à un investissement sans risque, avec un taux de participation  $y$ . Le paiement à l'échéance d'un tel contrat émis à l'instant  $t = 0$  est le suivant :

$$\max \left( \beta e^{xT}, \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^y \right). \quad (2.26)$$

La première étape pour arriver au prix de la garantie est décomposer le paiement de la garantie à l'intérieur de l'espérance prise sous la mesure risque-neutre :

$$\begin{aligned} P_t^{pp}(S_0, S_t, x, y, \beta, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \max \left( \beta e^{xT}, \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^y \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r\tau} \beta e^{xT} + \left( \frac{1}{S_0} \right)^y e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(0, S_T^y - S_0^y \beta e^{xT}) \middle| \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

On remarque que le calcul de  $e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(0, S_T^y - S_0^y \beta e^{xT}) \middle| \mathcal{F}_t]$  est similaire à la valorisation de la valeur d'une option d'achat dont la dynamique de l'actif sous-jacent est celle de  $S_t^y$  et le prix d'exercice est de  $S_0^y \beta e^{xT}$ . On peut facilement déduire que

$$S_T^y | \mathcal{F}_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_t^y \exp((r - \omega)\tau y + yX_\tau), \quad (2.28)$$

et que

$$S_T^y | \gamma(\tau; 1, \nu) = g, \mathcal{F}_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_t^y \exp((r - \omega)\tau y) \exp(y\theta g + y\sigma B_g). \quad (2.29)$$

Les relations des équations (2.28) et (2.29) montrent qu'il est possible d'utiliser les résultats précédents pour le modèle Variance Gamma et qu'il est donc possible de trouver

une expression fermée pour le calcul du prix. En utilisant la formule de Madan *et al.* (1998) pour une option d'achat européenne et en utilisant les paramètres modifiés du processus Variance Gamma exponentiel, on obtient que la formule pour le prix est la suivante :

$$P_t^{pp}(S_0, S_t, x, y, \beta, T) = e^{-r\tau} \beta e^{xT} + \left( \frac{S_t}{S_0} \right)^y \Psi \left( d \sqrt{\frac{1-c_1}{\nu}}, (\alpha + s) \sqrt{\frac{\nu}{1-c_1}}, \frac{\tau}{\nu} \right) - e^{-r\tau} \beta e^{xT} \Psi \left( d \sqrt{\frac{1-c_2}{\nu}}, \alpha s \sqrt{\frac{\nu}{1-c_2}}, \frac{\tau}{\nu} \right), \quad (2.30)$$

où

$$d = \frac{1}{s} \left( \log \left( \frac{S_t^y}{S_0^y \beta e^{xT}} \right) + ry\tau + \frac{\tau}{\nu} \log \left( \frac{1-c_1}{1-c_2} \right) \right), \quad (2.31)$$

et

$$\alpha = \frac{-\theta}{\sigma \sqrt{1 + \left( \frac{\theta}{\sigma} \right)^2 \frac{\nu}{2}}}, \quad (2.32)$$

$$s = \frac{ys\sigma}{\sqrt{1 + \left( \frac{\theta}{\sigma} \right)^2 \frac{\nu}{2}}}, \quad (2.33)$$

$$c_1 = \frac{\nu(\alpha + s)^2}{2}, \quad (2.34)$$

$$c_2 = \frac{\nu\alpha^2}{2}. \quad (2.35)$$

## 2.8.2 Conception cliquet

La conception cliquet consiste à assurer un rendement minimum pour des périodes prédéterminées. Les rendements périodiques du produit sont capitalisés à la fin de chaque période  $\Delta t$ . Les rendements périodiques sont les mêmes que ceux de la conception point à point. À chaque période, l'investisseur reçoit le maximum entre le taux minimum garanti  $x$  et le rendement du marché ajusté selon le taux de participation  $y$ . Le paiement d'un tel contrat échelonné sur  $n$  périodes et émis à l'instant  $t = 0$  est de

$$\prod_{i=1}^n \max \left( \beta e^{x\Delta t}, \left( \frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^y \right). \quad (2.36)$$



Pour un instant  $t < \Delta t$ , la valeur de ce produit est la suivante :

$$\begin{aligned}
P_t^c(S_0, S_t, x, y, \beta, \Delta t, n) &= e^{-r(n\Delta t - t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \prod_{i=1}^n \max \left( \beta e^{x\Delta t}, \left( \frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^y \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-r(n\Delta t - t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \max \left( \beta e^{x\Delta t}, \left( \frac{S_{\Delta t}}{S_0} \right)^y \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \prod_{i=2}^n \max \left( \beta e^{x\Delta t}, \left( \frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^y \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-r(\Delta t - t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \max \left( \beta e^{x\Delta t}, \left( \frac{S_{\Delta t}}{S_0} \right)^y \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&\quad \cdot \prod_{i=2}^n e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \max \left( \beta e^{x\Delta t}, \left( \frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^y \right) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)\Delta t} \right] \\
&= P_t^{pp}(S_0, S_t, x, y, \beta, \Delta t) [P_0^{pp}(S_0, S_t, x, y, \beta, \Delta t)]^{n-1}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

## CHAPITRE III

### LA MÉTHODE MONTE CARLO APPLIQUÉE AU MODÈLE VARIANCE GAMMA

#### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, un survol de la méthode Monte Carlo pour l'évaluation d'options exotiques est fait en premier lieu. Par la suite, la simulation naïve du processus variance gamma et la technique de ponts sont introduits. Ensuite, différentes méthodes d'évaluation de lettres grecques sont présentées, celles-ci étant tout particulièrement adaptées aux processus de Lévy exponentiels.

#### 3.2 La méthode Monte Carlo

On explique comment utiliser la technique de la simulation Monte Carlo pour obtenir un estimateur du prix d'options exotiques européennes. Soit  $H = H(S_s : 0 \leq s \leq T)$ , la *valeur présente* du paiement d'un tel produit dérivé à l'échéance, paiement dépendant de la trajectoire de l'actif sous-jacent ( $S_s : t \leq s \leq T$ ). On utilise la valeur présente du paiement pour simplifier la notation, surtout lors du calcul de lettres grecques et on suppose un taux d'intérêt déterministe ; c'est donc dire que lorsqu'il est mentionné paiement, on fait référence à la *valeur présente* du paiement. Il faut d'abord simuler des réalisations d'un échantillon i.i.d.  $H^{(i)}, i = 1, 2, \dots, M$  de paiements, où  $M$  représente le nombre de simulations. Cet échantillon nous permettra ensuite d'estimer  $V_t = \mathbb{E}^Q[H]$ , soit la valeur du produit dérivé. Pour ce faire, l'approche consiste à simuler des trajectoires discrètes

de l'actif sous-jacent,

$$S^{(i)} = \left( S_{t_1}^{(i)}, \dots, S_{t_N}^{(i)} \right), \quad i = 1..M, \quad (3.1)$$

où  $N$  représente le nombre de pas discrets utilisé et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  est la partition du temps de  $[0, T]$  considérée. On note donc que pour la suite de ce document, les paiements sont calculés en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent à des instants discrets, ce qui est nécessaire pour l'estimation Monte Carlo et l'estimation de lettres grecques. Ainsi, quand on fait référence à  $S$ , il s'agit de  $S = (S_{t_1}, \dots, S_{t_N})$ . Cette façon de procéder fait en sorte qu'il existe un biais de discrétisation pour les options exotiques. Par exemple, en estimant une option dont le paiement dépend du minimum sur la trajectoire, le minimum simulé ne sera jamais aussi faible que le véritable minimum de la trajectoire. En effet, le véritable minimum s'est déroulé entre deux instants discrets simulés alors que la réalisation utilisée pour le calcul du minimum est le minimum de tous les points discrets de la trajectoire. La façon la plus simple pour diminuer ce biais est d'augmenter le nombre de pas discrets, mais cette façon de faire augmente considérablement le temps nécessaires à la simulation Monte Carlo. Certaines options dépendent seulement d'instant discrets, dans ce cas, il n'y pas la présence d'un biais de discrétisation. L'estimateur du paiement pour une trajectoire donnée est donc calculé comme étant

$$H^{(i)} = H(S^{(i)}), \quad i = 1..M. \quad (3.2)$$

Par exemple, pour une option d'achat *lookback floating strike* dont le paiement est de

$$S_T - S_{\min}, \quad (3.3)$$

où  $S_{\min} = \min \left( S_{t_1}^{(i)}, \dots, S_{t_N}^{(i)} \right)$ , on a que la fonction  $H^{(i)}$  estimant la *valeur présente* du paiement pour une trajectoire serait la suivante :

$$H^{(i)} = e^{-r(T-t)} \left( S_T^{(i)} - \min \left( S_{t_1}^{(i)}, \dots, S_{t_N}^{(i)} \right) \right) = e^{-r(T-t)} \left( S_T^{(i)} - \min S^{(i)} \right), \quad (3.4)$$

en supposant un taux continu  $r$ . Par la suite, la valeur du produit est estimée en prenant la moyenne empirique des paiements simulés :

$$\hat{V}_t = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M H^{(i)}. \quad (3.5)$$

Chaque  $H^{(i)}, i = 1, 2, \dots, M$ , a une moyenne  $V_t$  et un écart type qu'on note  $\sigma$ . Par le théorème central limite,  $\hat{V}_t$  suit une loi normale de moyenne  $V_t$  et d'écart type  $\sigma/\sqrt{M}$ . La qualité de cet estimateur dépend donc du nombre de simulations et de l'écart-type des paiements estimés. Pour améliorer les résultats, il existe donc deux solutions principales permettant de réduire l'écart-type de l'estimateur  $V_t$  : augmenter le nombre de simulations  $M$  ou diminuer l'écart-type  $\sigma$  en utilisant des techniques de réduction de variance.

Il existe également des techniques Quasi Monte Carlo qui permettent d'augmenter la rapidité de la convergence de l'estimateur du prix. Cette méthode diffère de la méthode Monte Carlo de par la façon dont on simule l'actif sous-jacent. La façon Monte Carlo de simuler l'actif sous-jacent est d'utiliser des séquences pseudo-aléatoires de variables aléatoires uniformes permettant de générer des variables aléatoires plus complexes telles des variables aléatoires normales, gamma ou beta par exemple. Cette façon de procéder fait en sorte, par le fait que les variables uniformes soient générées aléatoirement, que les variables aléatoires uniformes simulées peuvent se retrouver concentrées dans certaines zones et en négliger d'autres. Des séquences déterministes appelées de faible discrédance permettent de s'assurer que les variables uniformes simulées couvrent plus uniformément toutes les zones. La vitesse de convergence d'un estimateur Monte Carlo est de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$  alors qu'elle est de  $\mathcal{O}\left(\frac{\log(M)}{\sqrt{M}}\right)$  pour un estimateur Quasi Monte Carlo. Ce résultat implique donc une convergence plus rapide d'un estimateur Quasi Monte Carlo que pour un estimateur Monte Carlo. Pour un traitement plus complet de la théorie sur les techniques Quasi Monte Carlo appliquées à l'ingénierie financière, on recommande le livre Glasserman (2004).

### 3.3 Simulation naïve et technique des ponts

Les techniques présentées dans ce chapitre sont tirées d'un article de Ribeiro et Webber (2004). Cet article s'attarde à développer des algorithmes efficaces, dans le cas particulier du modèle Variance Gamma, pour tarifier des options dont la valeur terminale dépend de la trajectoire de l'actif sous-jacent. Utiliser un pont consiste à simuler d'abord le

processus au temps  $t_k$  et on considère la valeur du processus au temps  $t_i$  comme étant connue. Par la suite, le processus est simulé à un temps intermédiaire  $t_j$ . La même procédure peut être appliquée de nombreuses fois, en simulant le processus entre deux valeurs connues, pour obtenir la trajectoire d'un processus. D'un point de vue statistique, simuler une trajectoire en utilisant une simulation naïve ou la technique des ponts revient exactement au même. Ce qui permet de rendre la technique des ponts plus efficace qu'une technique naïve est la combinaison de celle-ci avec des simulations Quasi Monte Carlo. En effet, la technique des ponts permet de simuler l'essentiel de la trajectoire basée sur des séquences à faible discrétance pour un faible nombre de points discrets. Les points intermédiaires supplémentaires sont ensuite simulés en utilisant des séquences pseudo-aléatoires. Dans le modèle de Black-Scholes, la technique des ponts est utilisée pour simuler les extrêmes du processus entre un point de départ et un point terminal tous deux connus, ce qui permet de corriger le biais de discrétisation pour certaines options exotiques ; la même technique peut également s'appliquer à d'autres modèles de diffusion avec sauts comme le modèle de Kou ou de Merton. Ribeiro et Webber (2004) ont publié un article proposant une estimation des extrêmes du processus. Cependant, les articles de Becker (2010a) et de Becker (2010b) du même auteur montrent que la correction du biais dans Ribeiro et Webber (2004) est en fait trop élevée, mais même avec cette méthode supposée meilleure, il existe toujours un biais de discrétisation assez important. À notre connaissance, il n'existe pas de technique permettant de simuler les extrêmes d'un processus Variance Gamma parfaitement, conditionnellement aux valeurs initiales et terminales du processus, pour tarifier des options à barrière ou du type *lookback* par exemple.

La notation suivante sera utilisée dans le reste de cette section. Soit  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ , un processus Variance Gamma sur  $[0, T]$ . On note par  $M$  le nombre de trajectoires simulées, par  $N$  le nombre de pas de temps et la partition des temps pendant lesquels le processus est simulé est  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Par souci de simplicité, tous les accroissements de temps sont égaux, c'est-à-dire que  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = T/N$ .

### 3.4 Simulation naïve du processus Variance Gamma

La façon naïve de simuler un processus Variance Gamma est détaillée. On exprime le processus comme un mouvement brownien subordonné par un processus gamma, c'est-à-dire que  $X_t = \theta\gamma(t; 1, \nu) + \sigma B_{\gamma(t; 1, \nu)} = b(\gamma(t))$ . On s'intéresse d'abord aux trajectoires discrètes du processus gamma  $\gamma = (\gamma(t) : 0 \leq t \leq T)$  :

$$\gamma^{(i)} = \left( \gamma_{t_1}^{(i)}, \dots, \gamma_{t_N}^{(i)} \right), \quad i = 1..M. \quad (3.6)$$

Cependant, pour simuler le processus Variance Gamma, seuls les accroissements du processus gamma discrétisé sont nécessaires. Ceux-ci sont donc d'abord simulés et notés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= (\gamma(t_1), \gamma(t_2) - \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}), \dots, \gamma(t_N) - \gamma(t_{N-1})) \\ &\equiv (\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\gamma}(t_2), \dots, \tilde{\gamma}(t_j), \dots, \tilde{\gamma}(t_N)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Chaque accroissement  $\tilde{\gamma}(t_j) \sim G\left(\frac{\Delta t_N}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$  en utilisant la paramétrisation de l'équation (1.4). Une fois tous les accroissements simulés, la trajectoire pourrait simplement être construite de façon récursive. Conditionnellement aux accroissements gamma  $\tilde{\gamma}$ , il est possible de simuler les accroissements du mouvement brownien subordonné (processus Variance Gamma) :

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= (b(t_1), b(t_2) - b(t_1), \dots, b(t_j) - b(t_{j-1}), \dots, b(t_N) - b(t_{N-1})) \\ &\equiv (\tilde{b}(t_1), \tilde{b}(t_2), \dots, \tilde{b}(t_j), \dots, \tilde{b}(t_N)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Chaque accroissement du processus est simulé en utilisant le fait que

$$\tilde{b}(t_j) \sim N(\theta\tilde{\gamma}(t_j), \sigma^2\tilde{\gamma}(t_j)). \quad (3.9)$$

La trajectoire complète est ensuite construite de façon récursive en prenant comme valeur initiale du processus  $b(0) = 0$ . On détaille maintenant l'algorithme de simulation pour une trajectoire sous la forme de pseudo-code.

**Pseudo-code 1** (Simulation naïve du processus VG exprimé comme un mouvement brownien subordonné avec les paramètres  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$ ,  $N$  et  $T$ ).

```

 $b(0) \leftarrow 0$ 
 $\Delta t_n \leftarrow T/N$ 
for  $j \leftarrow 1$  to  $N$ 
  do  $\begin{cases} \text{Générer } \tilde{\gamma}(t_j) \sim G\left(\frac{\Delta t_N}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \\ \text{Générer } \tilde{b}(t_j) \sim N(\theta \tilde{\gamma}(t_j), \sigma^2 \tilde{\gamma}(t_j)) \\ b(t_j) = b(t_{j-1}) + \tilde{b}(t_j) \end{cases}$ 

```

On exprime maintenant le processus comme la différence de processus gamma indépendants :

$$X_t = G^+(t; \alpha, \beta_+) - G^-(t; \alpha, \beta_-) = G_t^+ - G_t^-, \quad (3.10)$$

où on rappelle que  $G(t; \alpha, \beta)$  est un processus gamma ayant une densité telle que définie dans l'équation (1.22). L'étape la plus importante pour générer une trajectoire est la simulation des accroissements gamma indépendants et notés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\pm &= \left( G_{t_1}^\pm, G_{t_2}^\pm - G_{t_1}^\pm, \dots, G_{t_j}^\pm - G_{t_{j-1}}^\pm, \dots, G_{t_N}^\pm - G_{t_{N-1}}^\pm \right) \\ &\equiv \left( \tilde{G}_{t_1}^\pm, \tilde{G}_{t_2}^\pm, \dots, \tilde{G}_{t_j}^\pm, \dots, \tilde{G}_{t_N}^\pm \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour la simulation de la trajectoire, on pose d'abord  $X_0 = 0$  et chaque accroissement est simulé en utilisant le fait que  $\tilde{G}_{t_j}^\pm \sim G(\alpha \Delta t_N, \beta^\pm)$ . Une fois tous les accroissements simulés, on peut construire la trajectoire de façon récursive. On détaille maintenant l'algorithme de simulation pour une trajectoire sous la forme de pseudo-code.

**Pseudo-code 2** (Simulation naïve du processus VG exprimé la différence de deux processus gamma avec les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta^+$ ,  $\beta^-$ ,  $N$  et  $T$ ).

```

 $X_0 \leftarrow 0$ 
 $\Delta t_n \leftarrow T/N$ 
for  $j \leftarrow 1$  to  $N$ 
  do  $\begin{cases} \text{Générer } \tilde{G}_{t_j}^+ \sim G(\alpha \Delta t_N, \beta^+), \tilde{G}_{t_j}^- \sim G(\alpha \Delta t_N, \beta^-) \\ X_{t_j} = X_{t_{j-1}} + \tilde{G}_{t_j}^+ - \tilde{G}_{t_j}^- \end{cases}$ 

```

### 3.5 La technique des ponts pour un mouvement brownien

Soit les variables aléatoires  $X \sim f_X(x)$  et  $Y \sim f_Y(y)$  et la variable aléatoire  $Z = X + Y$  de densité  $f_Z(z)$ . Alors, la distribution conditionnelle  $X|Z$  est, pour  $x, z \in \mathbb{R}$ , la suivante :

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{f_{X,Y}(x, z-x)}{f_Z(z)}. \quad (3.12)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{f_X(x)f_Y(z-x)}{f_Z(z)}. \quad (3.13)$$

On fixe  $t_i < t_j < t_k$ . Dans le cas qui nous intéresse qui est celui d'un mouvement brownien, on a que  $X = B_{t_j} - B_{t_i} \sim N(0, \sigma_X^2)$  est un accroissement d'un mouvement brownien standard entre les temps  $t_i$  et  $t_j$ ,  $Y = B_{t_k} - B_{t_j} \sim N(0, \sigma_Y^2)$  est un accroissement d'un mouvement brownien standard entre les temps  $t_j$  et  $t_k$  et que  $Z = B_{t_k} - B_{t_i} \sim N(0, \sigma_Z^2)$  est un accroissement d'un mouvement brownien standard entre les temps  $t_i$  et  $t_k$ . On a que  $\sigma_X^2 = t_j - t_i$ ,  $\sigma_Y^2 = t_k - t_j$ ,  $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = t_k - t_i$ . La distribution conditionnelle de  $X|Z$  dans le cas de lois normales est trouvée :

$$\begin{aligned} f_{X|Z}(x|z) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma_X^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-x)^2}{\sigma_Y^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma_Z^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_Z}{\sigma_X \sigma_Y} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{z^2}{\sigma_Z^2} \right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\xi^2} (x - z\lambda)^2\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\lambda = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2} = \frac{t_j - t_i}{t_k - t_i}, \quad (3.15)$$

$$\xi = \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_Z} = \sqrt{\frac{(t_j - t_i)(t_k - t_j)}{(t_k - t_i)}}. \quad (3.16)$$

On a donc que

$$(B_{t_j} - B_{t_i}) | [(B_{t_k} - B_{t_i}) = z] \sim N\left(\frac{t_j - t_i}{t_k - t_i} z, \frac{(t_j - t_i)(t_k - t_j)}{(t_k - t_i)}\right). \quad (3.17)$$



On a aussi que

$$B_{t_j} | [B_{t_k} = w(t_k), B_{t_i} = w(t_i)] \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{t_k - t_j}{t_k - t_i} w(t_i) + \frac{t_j - t_i}{t_k - t_i} w(t_k) + \sqrt{\frac{(t_j - t_i)(t_k - t_j)}{(t_k - t_i)}} \epsilon, \quad (3.18)$$

où  $\epsilon \sim N(0, 1)$ . On présente maintenant l'algorithme pour simuler un mouvement brownien en utilisant la technique des ponts.

**Pseudo-code 3** (Simulation du mouvement brownien en utilisant la technique du pont brownien avec les paramètres  $K$  et  $T$ ).

```

 $N \leftarrow 2^K, t_N \leftarrow T$ 
 $B_0 \leftarrow 0$ 
Générer  $B_{t_N} \sim N(0, t_N)$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $K$ 
     $n \leftarrow 2^{K-i}$ 
    for  $l \leftarrow 1$  to  $2^{i-1}$ 
        do {
             $j \leftarrow (2l - 1)n$ 
            do {
                Générer  $B_{t_j} \sim$ 
 $N\left(\frac{t_{j+n} - t_j}{t_{j+n} - t_{j-n}} B_{t_{j-n}} + \frac{t_j - t_{j-n}}{t_{j+n} - t_{j-n}} B_{t_{j+n}}, \frac{(t_j - t_{j-n})(t_{j+n} - t_j)}{t_{j+n} - t_{j-n}}\right)$ 

```

### 3.6 La technique des ponts pour un processus gamma

On fixe  $t_i < t_j < t_k$ . Dans le cas qui nous intéresse qui est celui d'un processus gamma de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , on a que  $X = \gamma(t_j) - \gamma(t_i) \sim G(\alpha_X = \alpha(t_j - t_i), \beta)$ ,  $Y = \gamma(t_k) - \gamma(t_j) \sim G(\alpha_Y = \alpha(t_k - t_j), \beta)$  et  $Z = X + Y = \gamma(t_k) - \gamma(t_i) \sim G(\alpha_X + \alpha_Y, \beta)$ .

La distribution conditionnelle de  $X|Z$  dans le cas de lois gamma est trouvée :

$$\begin{aligned}
 f_{X|Z}(x|z) &= \frac{\frac{\beta^{\alpha_X} x^{\alpha_X-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_X)} \frac{\beta^{\alpha_Y} (z-x)^{\alpha_Y-1} e^{-\beta(z-x)}}{\Gamma(\alpha_Y)}}{\frac{\beta^{\alpha_X+\alpha_Y} z^{\alpha_X+\alpha_Y-1} e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_X+\alpha_Y)}} \\
 &= \frac{1}{z} \frac{\Gamma(\alpha_X + \alpha_Y)}{\Gamma(\alpha_X) \Gamma(\alpha_Y)} \left(\frac{x}{z}\right)^{\alpha_X-1} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha_Y-1} \\
 &= \frac{1}{z} \frac{\Gamma(\alpha(t_k - t_i))}{\Gamma(\alpha(t_j - t_i)) \Gamma(\alpha(t_k - t_j))} \left(\frac{x}{z}\right)^{\alpha(t_j - t_i)-1} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha(t_k - t_j)-1}, 0 < x < z.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

On a donc que  $X|(Z = z) \stackrel{\mathcal{L}}{=} z \cdot \text{Beta}(\alpha(t_j - t_i), \alpha(t_k - t_j))$ . En ce qui concerne la simulation du processus gamma, On remarque aussi que

$$\gamma(t_j) | [\gamma(t_i) = g(t_i), \gamma(t_k) = g(t_k)] = g(t_i) + \beta_{t_j}(g(t_k) - g(t_i)), \tag{3.20}$$

où  $\beta_{t_j} \sim \text{Beta}(\alpha(t_j - t_i), \alpha(t_k - t_j))$ . Pour appliquer le résultat de l'équation (3.20) au processus Variance Gamma lorsque celui-ci est représenté comme un mouvement brownien subordonné, il suffit de poser  $\alpha = \frac{1}{\nu}$  et  $\beta = \frac{1}{\nu}$ . On présente maintenant l'algorithme pour simuler un processus gamma en utilisant la technique des ponts.

**Pseudo-code 4** (Simulation du processus gamma en utilisant la technique des ponts avec les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$  et  $T$ ).

```

 $N \leftarrow 2^K, t_N \leftarrow T$ 
 $\gamma(0) \leftarrow 0$ 
Générer  $\gamma(t_N) \sim G(\alpha t_N, \beta)$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $K$ 
     $n = 2^{K-i}$ 
    for  $l \leftarrow 1$  to  $2^{i-1}$ 
        do {
             $j \leftarrow (2l - 1)n$ 
            do {
                Générer  $Y_j \sim \text{Beta}(\alpha(t_j - t_{j-n}), \alpha(t_{j+n} - t_j))$ 
                 $\gamma(t_j) \leftarrow \gamma(t_{j-n}) + Y_j(\gamma(t_{j+n}) - \gamma(t_{j-n}))$ 
            }
        }
    
```

### 3.7 Simulation du processus Variance Gamma en utilisant la technique des ponts

On combine les techniques du pont brownien et du pont gamma pour simuler un processus Variance Gamma. Les techniques combinées permettent de simuler le processus Variance Gamma en utilisant la représentation du processus comme un mouvement brownien subordonné alors que seule la technique du pont gamma est nécessaire en utilisant la représentation du processus comme la différence de deux processus gamma indépendants.

**Pseudo-code 5** (Simulation du processus Variance Gamma en utilisant la technique des ponts avec les paramètres  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$ ,  $K$  et  $T$ ).

```

 $N \leftarrow 2^K, t_N \leftarrow T$ 
 $b(0) \leftarrow 0, \gamma(0) \leftarrow 0$ 
Générer  $\gamma(t_N) \sim G(\frac{t_N}{\nu}, \frac{1}{\nu})$ ,  $b(t_N) \sim N(\theta\gamma(t_N), \sigma^2\gamma(t_N))$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $K$ 
do {
   $n \leftarrow 2^{K-i}$ 
  for  $l \leftarrow 1$  to  $2^{i-1}$ 
  do {
     $j \leftarrow (2l-1)n$ 
    Générer  $Y_j \sim \text{Beta}((t_j - t_{j-n})/\nu, (t_{j+n} - t_j)/\nu)$ 
    do {
       $\gamma(t_j) \leftarrow \gamma(t_{j-n}) + Y_j(\gamma(t_{j+n}) - \gamma(t_{j-n}))$ 
      Générer  $Z_j \sim N(0, \sigma^2 Y_j(\gamma(t_{j+n}) - \gamma(t_j)))$ 
       $b(t_j) = Y_j b(t_{j+n}) + (1 - Y_j)b(t_{j-n}) + Z_j$ 
    }
  }
}

```

### 3.8 Évaluation de lettres grecques

Dans cette section, il est question du calcul de lettres grecques, c'est-à-dire de la sensibilité du prix de certains produits dérivés par rapport aux paramètres du modèle utilisé pour tarifier le produit dérivé en question. Les sensibilités jouent un rôle prépondérant dans l'élaboration de stratégies de couverture. On note toutefois que pour les modèles de Lévy exponentiels, une couverture parfaite est impossible tant au niveau théorique

que pratique. Le modèle Variance Gamma étant un cas particulier des modèles de Lévy exponentiels, une couverture parfaite dans ce modèle est impossible.

Différentes méthodes peuvent être employées pour estimer les sensibilités du prix de certains produits dérivés. Cependant, dans cette section, on présente seulement des techniques Monte Carlo. En utilisant celles-ci, il existe plusieurs façons pour évaluer les lettres grecques. Une méthode intuitive est la méthode des différences finies, une méthode faisant directement appel à la définition de dérivée. Une autre méthode appelée la méthode trajectorielle nécessite de dériver le paiement du produit dérivé, paiement qui dépend de la trajectoire de l'actif sous-jacent, ce qui justifie le nom de la méthode. Finalement, la méthode à maximum de vraisemblance nécessite de dériver la densité de l'actif sous-jacent.

Peu importe la technique utilisée, le prix du produit dérivé dépend d'un ensemble de paramètres, notés ici  $\theta_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Par exemple, dans le modèle Variance Gamma, il serait possible de calculer les sensibilités pour les paramètres  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  du modèle (voir la section 2.5), mais également par rapport à la valeur de l'actif  $S_0$  et au taux d'intérêt  $r$ . La valeur d'un produit dérivé dépend de nombreux paramètres ainsi que du paiement  $H(S)$  de celui-ci. On écrit  $\mathbb{E}[H_{\theta_k}(S)]$  pour indiquer qu'on s'intéresse à la valeur du produit dérivé avec ce paramètre, les autres paramètres étant supposés constants. De façon générale, on peut exprimer la sensibilité par rapport à un paramètre  $\theta$  de la façon suivante :

$$\text{Grecque}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)]. \quad (3.21)$$

Pour une meilleure couverture, il est nécessaire d'évaluer les sensibilités pour des ordres plus élevés, mais généralement limité à la sensibilité d'ordre 2. Ainsi, on s'intéresse également au calcul de ces sensibilités. En général, on peut exprimer la sensibilité de d'ordre 2 de la façon suivante :

$$\text{GrecqueII}(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)]. \quad (3.22)$$

Pour la méthode des différences finies et la méthode trajectorielle, le paramètre  $\theta$  sera utilisé en indice de la fonction de paiement et on écrira donc  $H_{\theta}$  pour signifier qu'il

s'agit du paiement avec le paramètre en indice. Pour la méthode du maximum de vraisemblance, le paramètre sera plutôt mis en indice de l'espérance.

### 3.8.1 La méthode des différences finies

L'idée de base de cette méthode est d'utiliser la définition de la dérivée, ce qui permet d'approximer numériquement la sensibilité. Soit une fonction  $f(x)$  supposée deux fois dérivable. La dérivée de cette fonction  $f(x)$  peut être approximée, avec  $h > 0$ , par

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (3.23)$$

La dérivée du second ordre peut être approximée par

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \quad (3.24)$$

Ces approximations de dérivées sont appelées des approximations de différences finies et, plus précisément, des estimateurs de différence centrale. Dans le cas qui nous concerne, la fonction en question est la valeur d'un produit dérivé en fonction d'un paramètre. Une sensibilité du premier ordre, avec  $h > 0$ , est évaluée comme étant

$$\widehat{\text{Grecque}}(\theta) = \frac{\mathbb{E}[H_{\theta+h}(S)] - \mathbb{E}[H_{\theta-h}(S)]}{2h}. \quad (3.25)$$

Pour une sensibilité du second ordre, on obtient :

$$\widehat{\text{GrecqueII}}(\theta) = \frac{\mathbb{E}[H_{\theta+h}(S)] - 2\mathbb{E}[H_{\theta}(S)] + \mathbb{E}[H_{\theta-h}(S)]}{h^2}. \quad (3.26)$$

Les valeurs  $\mathbb{E}[H_{\theta+h}(S)]$ ,  $\mathbb{E}[H_{\theta}(S)]$  et  $\mathbb{E}[H_{\theta-h}(S)]$  peuvent être estimées en utilisant des estimateurs Monte Carlo, ce qui permet d'obtenir un estimateur pour une sensibilité. Formellement, l'estimateur Monte Carlo s'écrit comme étant

$$\widehat{\text{Grecque}}(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{H_{\theta+h}^{(i)} - H_{\theta-h}^{(i)}}{2h}, \quad (3.27)$$

où  $H_{\theta}^{(i)}$  est le paiement associé à une trajectoire  $i$  pour une valeur du paramètre  $\theta$  et où  $M$  représente le nombre de simulations. De façon équivalente, l'estimateur de la sensibilité d'ordre 2 se calcule de la façon suivante :

$$\widehat{\text{GrecqueII}}(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{H_{\theta+h}^{(i)} - H_{\theta}^{(i)} + H_{\theta-h}^{(i)}}{h^2}. \quad (3.28)$$

La méthode des différences finies comporte le principal désavantage d'être biaisée. Pour une sensibilité de premier ordre, on peut estimer  $\mathbb{E}[H_{\theta+h}(S)]$  et  $\mathbb{E}[H_{\theta-h}(S)]$  en utilisant des développements en séries de Taylor :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H_{\theta+h}(S)] &= \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] h + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^2) \\ \mathbb{E}[H_{\theta-h}(S)] &= \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] - \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] h + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Le biais pour une sensibilité d'ordre 1 est calculé comme étant

$$\text{Biais} \left( \widehat{\text{Grecque}}(\theta) \right) = \mathbb{E} \left[ \widehat{\text{Grecque}}(\theta) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)].\tag{3.30}$$

L'espérance de l'estimateur en utilisant l'équation (3.29) est la suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \widehat{\text{Grecque}}(\theta) \right] &= \frac{\mathbb{E}[H_{\theta+h}(S)] - \mathbb{E}[H_{\theta-h}(S)]}{2h} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] + \mathcal{O}(h).\end{aligned}\tag{3.31}$$

On obtient donc le biais suivant :

$$\text{Biais} \left( \widehat{\text{Grecque}}(\theta) \right) = \mathcal{O}(h).\tag{3.32}$$

Pour une sensibilité d'ordre 2, le biais est calculé comme étant

$$\text{Biais} \left( \widehat{\text{GrecqueII}}(\theta) \right) = \mathbb{E} \left[ \widehat{\text{GrecqueII}}(\theta) \right] - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)].\tag{3.33}$$

Toujours en utilisant l'équation (3.29), l'espérance de l'estimateur d'ordre 2 est la suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \widehat{\text{GrecqueII}}(\theta) \right] &= \frac{\mathbb{E}[H_{\theta+h}(S)] - 2\mathbb{E}[H_{\theta}(S)] + \mathbb{E}[H_{\theta-h}(S)]}{h^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}[H_{\theta}(S)] + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}\tag{3.34}$$

On obtient donc le biais suivant :

$$\text{Biais} \left( \widehat{\text{GrecqueII}}(\theta) \right) = \mathcal{O}(h^2).\tag{3.35}$$

### 3.8.2 La méthode trajectorielle

La méthode trajectorielle est basée sur le fait que, sous certaines conditions, il est possible d'échanger l'ordre de la limite et de l'espérance. Autrement dit, il faudrait pouvoir vérifier que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \frac{H_{\theta+h}(S) - H_{\theta}(S)}{h} \right] = \mathbb{E} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H_{\theta+h}(S) - H_{\theta}(S)}{h} \right]. \quad (3.36)$$

Cette relation est vraie sous certaines conditions. Une condition suffisante est que la fonction de paiement soit lipschitzienne et une condition nécessaire, mais non suffisante est que la fonction soit continue. Les paiements d'une option d'achat, d'une option asiatique et *lookback* vérifient les conditions nécessaires pour interchanger la limite et l'espérance. Par contre, dans le contexte du paiement d'une option, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, pour une option binaire du type *cash-or-nothing*, le paiement ne vérifie pas les conditions et la méthode serait impossible à appliquer. On remarque qu'au point  $S_T = K$ , pour une option d'achat, le paiement n'est pas continue, mais cet évènement a une probabilité nulle et le paiement respecte la condition lipschitzienne pour les autres valeurs de  $S_T$ . En supposant un paiement respectant les conditions nécessaires, on peut écrire la sensibilité de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E} [H_{\theta}(S)] = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} H_{\theta}(S) \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial H_{\theta}(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right]. \quad (3.37)$$

L'estimateur Monte Carlo de la sensibilité serait donc

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\partial H_{\theta}(S^{(i)})}{\partial S^{(i)}} \frac{\partial S^{(i)}}{\partial \theta}. \quad (3.38)$$

On rappelle que pour des simulations, on travaille avec des instants discrets de la trajectoire, ce qui modifie l'équation (3.38) de la façon suivante :

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\partial H_{\theta}(S^{(i)})}{\partial S_{t_j}^{(i)}} \frac{\partial S_{t_j}^{(i)}}{\partial \theta}, \quad (3.39)$$

où  $S_{t_j}^{(i)}$  représente la valeur de l'actif simulé pour une trajectoire  $i$  à un instant  $t_j$ .

**Exemple 4.** Soit une option d'achat dont la valeur présente du paiement à l'échéance  $H(S_T)$  est de

$$H(S_T) = e^{-rT} (S_T - K) \mathbb{I}_{S_T > K}. \quad (3.40)$$

On s'intéresse à évaluer le delta ( $\Delta$ ) de cette option, c'est-à-dire la sensibilité du prix de l'option par rapport à  $S_0$ . Le modèle Variance Gamma est utilisé pour décrire l'actif sous-jacent, on peut donc écrire que

$$S_T = S_0 e^{(r-\omega)T + X_T}, \quad (3.41)$$

où  $X_T$  est un processus Variance Gamma. La première étape consiste à calculer la dérivée partielle de  $H(S_T)$  par rapport à  $S_T$  :

$$\frac{\partial H(S_T)}{\partial S_T} = e^{-rT} \mathbb{I}_{S_T > K}. \quad (3.42)$$

On remarque que ce résultat est vrai pour tous les modèles de Lévy exponentiels. On s'intéresse maintenant à dérivée de  $S_T$  par rapport à  $S_0$  et on obtient facilement que

$$\frac{\partial S_T}{\partial S_0} = e^{(r-\omega)T + X_T} = \frac{S_T}{S_0}. \quad (3.43)$$

L'estimateur Monte Carlo du delta serait donc le suivant :

$$\hat{\Delta} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^M \frac{S_T^{(i)}}{S_0} \mathbb{I}_{S_T^{(i)} > K}. \quad (3.44)$$

Pour montrer la validité de l'exemple précédent, on peut aussi vérifier qu'on obtient la bonne valeur du delta dans le modèle de Black-Scholes. Dans ce modèle, il est bien connu que la valeur du delta est  $N(d_1)$ , où  $d_1$  est une constante. Une façon de le montrer est de dériver directement la formule explicite du prix de l'option. En utilisant la méthode trajectorielle, le calcul du delta revient à calculer

$$\Delta = \mathbb{E}^Q \left[ e^{-rT} \frac{S_T}{S_0} \mathbb{I}_{S_T > K} \right]. \quad (3.45)$$

Par la formule de Black-Scholes pour une option d'achat, on sait que

$$\mathbb{E}^Q [e^{-rT} S_T \mathbb{I}_{S_T > K}] = S_0 N(d_1). \quad (3.46)$$

On retrouve donc que  $\Delta = \frac{S_0 N(d_1)}{S_0} = N(d_1)$ . On revient maintenant au modèle Variance Gamma et on s'intéresse au calcul du delta d'une option d'achat asiatique. Cet exemple est intéressant puisqu'il montre qu'on peut appliquer la méthode trajectorielle en dérivant le paiement de l'option par rapport aux valeurs de l'actif à plusieurs temps discrets.



**Exemple 5.** Soit une option d'achat asiatique dont la valeur présente du paiement à l'échéance  $H(S)$ ,  $S = (S_{t_1}, \dots, S_{t_N})$ , est de

$$e^{-rT} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i} - K \right) \mathbb{I}_{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i} > K}. \quad (3.47)$$

On s'intéresse à évaluer le delta ( $\Delta$ ) de cette option et on suppose que l'actif sous-jacent est modélisé par le modèle Variance Gamma. Pour ce faire, la première étape consiste à calculer la dérivée partielle de  $H(S)$  par rapport à la valeur de l'actif à un instant donné :

$$\frac{\partial H(S)}{\partial S_{t_j}} = \frac{e^{-rT}}{N} \mathbb{I}_{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_{t_j} > K}. \quad (3.48)$$

On s'intéresse maintenant à dérivée de  $S_{t_j}$  par rapport à  $S_0$  et en utilisant la même procédure que dans l'exemple (4), on obtient que

$$\frac{\partial S_{t_j}}{\partial S_0} = \frac{S_{t_j}}{S_0}. \quad (3.49)$$

On peut maintenant combiner ces deux résultats pour obtenir l'estimateur du delta :

$$\hat{\Delta} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \frac{S_{t_j}^{(i)}}{S_0} \mathbb{I}_{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{t_k}^{(i)} > K}. \quad (3.50)$$

On peut réécrire l'équation (3.50) plus simplement en notant la moyenne sur une trajectoire comme étant

$$S_{\text{moy}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i}. \quad (3.51)$$

Ce changement fait en sorte qu'on peut réécrire l'estimateur comme étant

$$\hat{\Delta} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^M \frac{S_{\text{moy}}^{(i)}}{S_0} \mathbb{I}_{S_{\text{moy}}^{(i)} > K}. \quad (3.52)$$

On calcule maintenant l'estimateur du delta d'une option *lookback floating strike*.

**Exemple 6.** Soit une option lookback floating strike dont le paiement à l'échéance  $H(S)$ ,  $S = (S_{t_1}, \dots, S_{t_N})$ , est de

$$S_T - S_{\min}. \quad (3.53)$$

On s'intéresse à évaluer le delta ( $\Delta$ ) de cette option et on suppose que l'actif sous-jacent est modélisé par le modèle Variance Gamma. Pour ce faire, la première étape consiste

à calculer la dérivée partielle de  $H(S)$  par rapport à la valeur de l'actif à un instant donné :

$$\frac{\partial H(S)}{\partial S_{t_j}} = e^{-rT} \left( \mathbb{I}_{S_T=S_{t_j}} - \mathbb{I}_{S_{min}=S_{t_j}} \right). \quad (3.54)$$

On s'intéresse maintenant à la dérivée de  $S_{t_j}$  par rapport à  $S_0$  et en utilisant la même procédure que dans l'exemple (4), on obtient que

$$\frac{\partial S_{t_j}}{\partial S_0} = \frac{S_{t_j}}{S_0}. \quad (3.55)$$

On peut maintenant combiner ces deux résultats pour obtenir l'estimateur du delta :

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left( \mathbb{I}_{S_T^{(i)}=S_{t_j}^{(i)}} - \mathbb{I}_{S_{min}^{(i)}=S_{t_j}^{(i)}} \right) \frac{S_{t_j}^{(i)}}{S_0} \\ &= \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^M \left( \frac{S_T^{(i)} - S_{min}^{(i)}}{S_0} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 3.8.3 La méthode du maximum de vraisemblance

L'avantage de la méthode du maximum de vraisemblance est qu'elle n'impose aucune condition sur la forme du paiement de l'option. En effet, la méthode trajectorielle est très sensible au paiement, alors que dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance, il est plutôt nécessaire de dériver la fonction de densité. On suppose donc que les fonctions de densité existent, même si parfois on ne connaît que la fonction caractéristique. Il est parfois possible d'obtenir explicitement les dérivées de fonctions de densité par rapport au paramètre qui nous intéresse pour obtenir la sensibilité, comme dans le cas du modèle Black-Scholes par exemple. Pour la plupart des processus cependant, il est nécessaire d'approximer numériquement cette dérivée.

Le développement de la méthode du maximum de vraisemblance est le suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_\theta [H(S)] &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^N} H(s) f_S(s) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} H(s) \frac{\partial}{\partial \theta} f_S(s) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} H(s) \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f_S(s)}{f_S(s)} f_S(s) ds \\
&= \mathbb{E} \left[ H(S) \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f_S(S)}{f_S(S)} \right] \\
&= \mathbb{E} [H(S) \eta_\theta(S)],
\end{aligned} \tag{3.57}$$

où  $f_S$  est la fonction de densité de  $S = (S_{t_1}, \dots, S_{t_N})$ , la trajectoire discrète de l'actif sous-jacent, et  $\eta_\theta(S) = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f_S(S)}{f_S(S)}$  est la fonction de score et c'est cette fonction qu'il est nécessaire d'estimer. En utilisant la même procédure, il est possible d'évaluer une dérivée d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathbb{E}_\theta [H(S)] = \mathbb{E}_\theta \left[ H(S) \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f_S(S)}{f_S(S)} \right]. \tag{3.58}$$

Pour une sensibilité du deuxième ordre, la fonction de score est donc de  $\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f_S(S)}{f_S(S)}$ .

**Exemple 7.** On cherche à évaluer la fonction de score pour divers paramètres dans le modèle de Black-Scholes. On suppose que l'option à évaluer dépend seulement de la valeur terminale, ce qui implique que la densité est unidimensionnelle. L'identité suivante est bien connue :

$$\begin{aligned}
S_T &\stackrel{\mathcal{L}}{=} S_0 e^{(r-0.5\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \\
&= e^{\log S_0 + (r-0.5\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

où  $S_T$  est la variable aléatoire représentant la valeur terminale de l'actif sous-jacent et  $Z \sim N(0, 1)$ . Soit  $A_T = \log S_0 + (r - 0.5\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z$ , on a donc que  $A_T \sim N(\log S_0 + (r - 0.5\sigma^2)T, \sigma^2 T)$  et que  $S_T = e^{A_T} \sim \text{Lognormale}(\log S_0 + (r - 0.5\sigma^2)T, \sigma^2 T)$ . La densité de  $S_T$  peut donc s'écrire directement comme étant

$$f_{S_T}(s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(s) - \log S_0 - (r-0.5\sigma^2)T)^2}{2\sigma^2 T}}. \tag{3.60}$$

Pour le calcul de fonction de score du delta  $\Delta$ , on calcule la dérivée de la densité par rapport à  $S_0$  :

$$\frac{\partial}{\partial S_0} f_{S_T}(s) = f_{S_T}(s) \frac{\log(s/S_0) - (r - 0.5\sigma^2)T}{S_0\sigma^2T}. \quad (3.61)$$

La fonction de score est donc la suivante :

$$\eta_{\Delta}(s) = \frac{\log(s/S_0) - (r - 0.5\sigma^2)T}{S_0\sigma^2T}. \quad (3.62)$$

La même procédure peut être appliquée pour le calcul du vega ( $v$ ) et on trouve que la fonction de score est la suivante :

$$\eta_v(s) = -\frac{1}{\sigma} + \frac{\log(s/S_0)^2 - 2rT \log(s/S_0) + T^2(r^2 - \sigma^4/4)}{\sigma^3T}. \quad (3.63)$$

Toujours dans le modèle de Black-Scholes, on s'intéresse au delta ( $\Delta$ ) d'une option exotique.

**Exemple 8.** On cherche à évaluer la fonction de score du  $\Delta$  dans le modèle de Black-Scholes, mais pour une option exotique dont le paiement à l'échéance dépend de la trajectoire. En utilisant le fait que le processus est markovien, la densité de  $S$  peut être écrite comme étant

$$f_S(s) = f_S(s_{t_1}, \dots, s_{t_N}) = f_1(s_{t_1}|S_0)f_2(s_{t_2}|s_{t_1}) \cdots f_N(s_{t_N}|s_{t_{N-1}}), \quad (3.64)$$

où  $f_j(s_{t_j}|s_{t_{j-1}})$ ,  $j = 1 \cdots N$  représente la densité de transition du processus du temps  $t_{j-1}$  jusqu'au temps  $t_j$ . Cette densité est lognormale et peut s'écrire de la façon suivante :

$$f_j(s_{t_j}|s_{t_{j-1}}) = \frac{1}{s_{t_j}\sigma\sqrt{t_j - t_{j-1}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(s_{t_j}/s_{t_{j-1}}) - (r - 0.5\sigma^2)(t_j - t_{j-1}))^2}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})}}. \quad (3.65)$$

On remarque que  $S_0$  se retrouve seulement dans la densité  $f_1(s_{t_1}|S_0)$ , ce qui permet d'évaluer la fonction de score de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_0} f_S(s_{t_1}, \dots, s_{t_N}) &= f_2(s_{t_2}|s_{t_1}) \cdots f_N(s_{t_N}|s_{t_{N-1}}) \frac{\partial}{\partial S_0} f_1(s_{t_1}|S_0) \\ &= f_2(s_{t_2}|s_{t_1}) \cdots f_N(s_{t_N}|s_{t_{N-1}}) f_1(s_{t_1}|S_0) \frac{\log(s_{t_1}/S_0) - (r - 0.5\sigma^2)t_1}{S_0\sigma^2t_1} \\ &= f_S(s_{t_1}, \dots, s_{t_N}) \frac{\log(s_{t_1}/S_0) - (r - 0.5\sigma^2)t_1}{S_0\sigma^2t_1}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

La fonction de score est donc la suivante :

$$\eta_{\Delta}(s) = \frac{\log(s_{t_1}/S_0) - (r - 0.5\sigma^2)t_1}{S_0\sigma^2 t_1}. \quad (3.67)$$

### 3.8.4 La méthode de Glasserman et Liu (2008)

On aimerait appliquer la méthode du maximum de vraisemblance à des processus de Lévy exponentiels et, plus particulièrement, au modèle Variance Gamma. Cependant, pour ces processus, la densité du processus de Lévy à un instant fixé  $L_t$  est connue explicitement alors qu'on ne connaît généralement pas celle de l'actif sous-jacent. Dans le modèle de Black-Scholes, la densité de l'actif sous-jacent est lognormale, ce qui nous permettait de travailler directement avec celle-ci. En utilisant la nouvelle procédure, on pourra travailler directement avec la loi normale. Pour le modèle Variance Gamma, on connaît la densité de  $X_t$ , le processus Variance Gamma à un instant fixé, et non celle de  $S_t$ , l'actif sous-jacent qui est une transformation de  $X_t$ . Glasserman et Liu (2008) ont montré qu'il est possible de travailler avec la densité des accroissements du processus de Lévy pour l'application de la méthode du maximum de vraisemblance. On présente d'abord quelques notions préliminaires nécessaires à la méthode. Soit  $\tilde{L}$ , les accroissements d'un processus de Lévy correspondant à une partition du temps  $(t_1, \dots, t_N)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= (L_{t_1}, L_{t_2} - L_{t_1}, \dots, L_{t_j} - L_{t_{j-1}}, \dots, L_{t_N} - L_{t_{N-1}}) \\ &\equiv (\tilde{L}_{t_1}, \tilde{L}_{t_2}, \dots, \tilde{L}_{t_j}, \dots, \tilde{L}_{t_N}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

La densité de  $\tilde{L}$  est la suivante :

$$f_{\tilde{L}}(l) = f_1(l_{t_1}) \cdots f_j(l_{t_j}) \cdots f_N(l_{t_N}), \quad l = (l_{t_1}, \dots, l_{t_N}), \quad (3.69)$$

où  $f_j(l_{t_j})$  représente la densité du  $j^{\text{ième}}$  accroissement du processus de Lévy. Dans le cas où on s'intéresse seulement à la valeur terminale de l'actif sous-jacent, on peut écrire la valeur terminale de la façon suivante

$$S_T = S_0 \exp(a(\theta)T + L_T), \quad (3.70)$$

où  $a(\theta) = r - \omega$  est une constante et  $S_0$  est la valeur initiale de l'actif sous-jacent. On remarque qu'on exprime  $a(\theta)$  comme une fonction du paramètre d'intérêt pour simplifier la notation. On introduit également ce paramètre dans la fonction de densité et on écrit

$$f_{\tilde{L}}(l, \theta) = f_1(l_{t_1}, \theta) \cdots f_j(l_{t_j}, \theta) \cdots f_N(l_{t_N}, \theta), \quad (3.71)$$

dans le but de simplifier les démarches qui suivent. La valeur d'un produit dérivé peut s'exprimer comme étant

$$\mathbb{E}_\theta [H(S)] = \int_{\mathbb{R}^N} H(s) f_{\tilde{L}}(l, \theta) dl, \quad (3.72)$$

où, clairement,  $S$  est une fonction linéaire de  $\tilde{L}$ . On effectue d'abord le calcul de la sensibilité dans le cas uni-dimensionnel. Dans ce cas, on remarque d'abord que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta [H(S_T)] &= \int_{\mathbb{R}} H \left( S_0 e^{a(\theta)T+l} \right) f_{L_T}(l, \theta) dl \\ &= \int_{\mathbb{R}} H \left( S_0 e^{l'} \right) f_{L_T}(l - a(\theta)T, \theta) dl. \end{aligned} \quad (3.73)$$

On passe maintenant au calcul de la sensibilité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}_\theta [H(S_T)]}{\partial \theta} &= \int_{\mathbb{R}} H \left( S_0 e^{l'} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} f_{L_T}(l - a(\theta)T, \theta) dl \\ &= \int_{\mathbb{R}} H \left( S_0 e^{l'} \right) \left[ -a'(\theta)T \frac{\partial f_{L_T}(x, \theta)}{\partial x} \Big|_{x=l-a(\theta)T} + \frac{\partial f_{L_T}(x, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{x=l-a(\theta)T} \right] dl \\ &= \int_{\mathbb{R}} H \left( S_0 e^{a(\theta)T+l} \right) \frac{-a'(\theta)T \frac{\partial f_{L_T}(l, \theta)}{\partial l} + \frac{\partial f_{L_T}(l, \theta)}{\partial \theta}}{f_{L_T}(l, \theta)} f_{L_T}(l, \theta) dl \\ &= \mathbb{E}_\theta \left[ H(S_T) \frac{-a'(\theta)T \frac{\partial f_{L_T}(l, \theta)}{\partial l} + \frac{\partial f_{L_T}(l, \theta)}{\partial \theta}}{f_{L_T}(l, \theta)} \right] \\ &= \mathbb{E}_\theta [H(S_T) \eta_\theta(L_T)], \end{aligned} \quad (3.74)$$

où  $\eta_\theta(L_T) = \frac{-a'(\theta)T \frac{\partial f_{L_T}(l, \theta)}{\partial l} + \frac{\partial f_{L_T}(l, \theta)}{\partial \theta}}{f_{L_T}(l, \theta)}$  est la nouvelle fonction de score, une fonction de la densité du processus de Lévy. On remarque cependant que les résultats de l'équation (3.74) ne permettent pas d'estimer le delta ( $\Delta$ ) du produit dérivé, malgré qu'il s'agit d'un cas très important. En utilisant la même idée cependant, on remarque que le calcul du delta est en fait plus facile à effectuer que celui des autres sensibilités. On utilise

seulement la lettre  $a$  plutôt que  $a(\theta)$  puisque  $S_0$  ne dépend pas de  $a$  et on fait de même pour la densité en utilisant  $f_{L_T} = (l)$  pour la même raison. On remarque qu'on peut réécrire l'espérance comme étant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{S_0} [H(S_T)] &= \int_{\mathbb{R}} H \left( e^{\log(S_0) + aT + l} \right) f_{L_T}(l) dl \\ &= \int_{\mathbb{R}} H \left( e^{aT + l} \right) f_{L_T}(l - \log(S_0)) dl.\end{aligned}\quad (3.75)$$

La sensibilité se calcule donc comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{E}_{S_0} [H(S_T)]}{\partial S_0} &= \int_{\mathbb{R}} H \left( e^{aT + l} \right) \frac{-f'_{L_T}(x) \Big|_{x=l - \log(S_0)}}{S_0} dl \\ &= \int_{\mathbb{R}} H \left( e^{\log(S_0) + aT + l} \right) \frac{-f'_{L_T}(l)}{S_0 f_{L_T}(l)} f_{L_T}(l) dl \\ &= \mathbb{E}_{S_0} \left[ H(S_T) \frac{-f'_{L_T}(l)}{S_0 f_{L_T}(l)} \right] \\ &= \mathbb{E}_{S_0} [H(S_T) \eta_{S_0}(L_T)],\end{aligned}\quad (3.76)$$

où  $\eta_{S_0}(L_T) = \frac{-f'_{L_T}(l)}{S_0 f_{L_T}(l)}$  est la fonction de score pour le calcul du delta ( $\Delta$ ). Dans le cas multidimensionnel, on peut effectuer une démarche adaptée et très similaire à celles du cas unidimensionnel. On remarque d'abord que  $S$  est une transformation multivariée des accroissements du processus de Lévy et on peut écrire que

$$S = \left( S_0 e^{a(\theta)t_1 + \tilde{L}_{t_1}}, \dots, S_{t_i} e^{a(\theta)(t_i - t_{i-1}) + \tilde{L}_{t_i}}, \dots, S_{t_N} e^{a(\theta)(t_N - t_{N-1}) + \tilde{L}_{t_N}} \right). \quad (3.77)$$

La fonction de score est donc de

$$\eta_{\theta}(\tilde{L}) = \sum_{i=1}^N \frac{-a'(\theta)(t_{i+1} - t_i) \frac{\partial f_i(l_i, \theta)}{\partial l_i} + \frac{\partial f_i(l_i, \theta)}{\partial \theta}}{f_i(l_i, \theta)}. \quad (3.78)$$

Encore une fois, il faut utiliser une démarche alternative pour obtenir la fonction de score pour le calcul du delta ( $\Delta$ ) dans le cas multidimensionnel. On remarque d'abord qu'on peut écrire l'espérance comme étant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{S_0} [H(S)] &= \int_{\mathbb{R}^N} H(e^{at_1 + l_{t_1}}, s_2, \dots, s_N) f_1(l_1 - \log S_0) f_2(l_{t_2}) \cdots f_N(l_{t_N}) dl_{t_1} dl_{t_2} \cdots dl_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} H(e^{at_1 + l_{t_1}}, s_2, \dots, s_N) \frac{f_1(l_1 - \log S_0)}{f_1(l_{t_1})} f_{\tilde{L}}(l) dl\end{aligned}\quad (3.79)$$

La sensibilité se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbb{E}_{S_0} [H(S_T)]}{\partial S_0} &= \int_{\mathbb{R}^N} H(e^{at_1+l_{t_1}}, s_2, \dots, s_N) \frac{f'_1(x)|_{x=l_1-\log S_0}}{f_1(l_{t_1})} \left( \frac{-1}{S_0} \right) f_{\tilde{L}}(l) dl \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} H(e^{\log S_0+at_1+l_{t_1}}, s_2, \dots, s_N) \left( -\frac{f'_1(l_{t_1})}{S_0 f_1(l_{t_1})} \right) f_{\tilde{L}}(l) dl \\
 &= \mathbb{E}_{S_0} [H(S) \eta_{S_0}(L_{t_1})],
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

où  $\eta_{S_0}(L_{t_1}) = -\frac{f'_1(l_{t_1})}{S_0 f_1(l_{t_1})}$  est la fonction de score pour le calcul du delta ( $\Delta$ ).

On peut maintenant montrer comment appliquer la méthode concrètement ; on montre comment l'appliquer pour les modèles de Black-Scholes et Variance Gamma pour différentes sensibilités.

**Exemple 9.** *On cherche à évaluer la fonction de score pour le calcul du delta ( $\Delta$ ) dans le modèle de Black-Scholes en utilisant la méthode de Glasserman et Liu. On suppose que l'option à évaluer dépend seulement de la valeur terminale et on peut écrire la valeur terminale de l'actif de la façon suivante :*

$$S_T = S_0 e^{(r-0.5\sigma^2)T + Z_T}, \tag{3.81}$$

où  $a = (r - 0.5\sigma^2)T$ ,  $Z_T = \sigma B_T$  et  $B_T$  est un mouvement brownien standard. On a donc que  $Z_T \sim N(0, \sigma^2 T)$  et que la densité de  $Z_T$  est la suivante :

$$f_{Z_T}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}. \tag{3.82}$$

Pour le calcul de fonction de score du delta  $\Delta$ , on calcule la dérivée de la densité par rapport à  $z$  :

$$f'_{Z_T}(z) = -f_{Z_T}(z) \frac{z}{\sigma^2 T} \tag{3.83}$$

On a donc que la fonction de score du delta  $\Delta$  est la suivante :

$$\eta_{S_0}(Z_T) = -\frac{f'_{Z_T}(z)}{S_0 f_{Z_T}(z)} = \frac{Z_T}{S_0 \sigma^2 T}. \tag{3.84}$$

Toujours dans le modèle de Black-Scholes, on s'intéresse maintenant au calcul du vega  $\eta$ .



**Exemple 10.** On cherche à évaluer la fonction de score pour le calcul du vega ( $v$ ) dans le modèle de Black-Scholes en utilisant la méthode de Glasserman et Liu. On suppose que l'option à évaluer dépend seulement de la valeur terminale et on peut écrire la valeur terminale de l'actif de la façon suivante :

$$S_T = S_0 e^{a(\sigma) + Z_T}, \quad (3.85)$$

où  $a(\sigma) = (r - 0.5\sigma^2)T$ ,  $Z_T = \sigma B_T$  et  $B_T$  est un mouvement brownien standard. On a donc que  $Z_T \sim N(0, \sigma^2 T)$  et que la densité de  $Z_T$  est la suivante :

$$f_{Z_T}(z, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}. \quad (3.86)$$

De l'exemple (9), la dérivée de la densité par rapport à  $z$  est connue et on passe directement au calcul de la dérivée par rapport à  $\sigma$  :

$$\frac{\partial f_{Z_T}(z, \sigma)}{\partial \sigma} = f_{Z_T}(z, \sigma) \frac{1}{\sigma} \left( \frac{z^2}{\sigma^2 T} - 1 \right), \quad (3.87)$$

et  $a'(\sigma) = -\sigma$ . Finalement, on obtient la fonction de score du vega ( $v$ ) :

$$\eta_\sigma(Z_T) = \frac{-a'(\sigma)T \frac{\partial f_{Z_T}(z, \sigma)}{\partial z} + \frac{\partial f_{Z_T}(z, \sigma)}{\partial \sigma}}{f_{Z_T}(z, \sigma)} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{Z_T^2}{\sigma^2 T} - Z_T - 1 \right). \quad (3.88)$$

On connaît la densité  $f_{X_t}(x)$  du processus Variance Gamma à un instant fixé qu'on note  $X_t$  et d'ailleurs celle-ci est donnée par l'équation (1.10). Pour obtenir des fonctions de score dans le modèle Variance Gamma, on commence donc d'abord par dériver cette densité par rapport aux paramètres d'intérêt  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$ , ainsi que par rapport à  $x$  pour le delta ( $\Delta$ ). Une fois les dérivées connues, celles-ci peuvent être évaluées numériquement. Lors du calcul de sensibilités, il faudra donc simuler le processus Variance Gamma et pour chaque simulation, il sera nécessaire d'évaluer numériquement la dérivée par rapport au paramètre d'intérêt en plus de la dérivée par rapport à  $x$  et la densité elle-même, sauf pour le calcul du delta ( $\Delta$ ) où il est seulement nécessaire de calculer la dérivée par rapport à  $x$  et la densité. Voici les résultats du calcul des dérivées par rapport aux paramètres du modèle, celles-ci étant présentées sous la forme d'intégrales infinies :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X_t}(x, \theta)}{\partial \theta} &= \int_0^\infty \left( \frac{x - \theta g}{\sigma^2} \right) \\ &\cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} \exp \left( -\frac{(x - \theta g)^2}{2\sigma^2 g} \right) \left( \frac{1}{\nu} \right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp \left( -\frac{g}{\nu} \right)}{\gamma \left( \frac{t}{\nu} \right)} dg, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X_t}(x, \sigma)}{\partial \sigma} &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sigma} \right) \left( \frac{(x - \theta g)^2}{\sigma^2 g} - 1 \right) \\ &\cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} \exp \left( -\frac{(x - \theta g)^2}{2\sigma^2 g} \right) \left( \frac{1}{\nu} \right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp \left( -\frac{g}{\nu} \right)}{\gamma \left( \frac{t}{\nu} \right)} dg, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X_t}(x, \nu)}{\partial \nu} &= \int_0^\infty \left( \frac{t}{\nu^2} \right) \left( \frac{g}{t} + \Xi \left( \frac{t}{\nu} \right) - \log \left( \frac{g}{\nu} \right) - 1 \right) \\ &\cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} \exp \left( -\frac{(x - \theta g)^2}{2\sigma^2 g} \right) \left( \frac{1}{\nu} \right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp \left( -\frac{g}{\nu} \right)}{\gamma \left( \frac{t}{\nu} \right)} dg, \end{aligned} \quad (3.91)$$

où  $\Xi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$  est la fonction digamma,

$$f'_{X_t}(x) = \int_0^\infty \left( -\frac{x - \theta g}{\sigma^2 g} \right) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} \exp \left( -\frac{(x - \theta g)^2}{2\sigma^2 g} \right) \left( \frac{1}{\nu} \right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp \left( -\frac{g}{\nu} \right)}{\gamma \left( \frac{t}{\nu} \right)} dg. \quad (3.92)$$

Dans le modèle Variance Gamma et dans le contexte de l'équation (3.74), on a que  $a(\cdot) = r - \omega$ , où  $\omega = -\frac{1}{\nu} \log(1 - \theta\nu - \nu/2)$  et que le point  $(\cdot)$  peut être remplacé par le paramètre auquel on s'intéresse à la sensibilité. Voici donc les dérivées de cette fonction pour les différents paramètres :

$$a'(\theta) = \frac{-1}{1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2}, \quad (3.93)$$

$$a'(\sigma) = \frac{-\sigma}{1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2}, \quad (3.94)$$

$$a'(\nu) = -\frac{1}{\nu^2} \log(1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2) - \frac{1}{\nu} \frac{\theta + \sigma^2/2}{1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2}. \quad (3.95)$$



## CHAPITRE IV

### VALORISATION D'OPTIONS AVEC LES TRANSFORMÉES DE FOURIER

#### 4.1 Introduction

Les praticiens ont besoin de techniques rapides permettant de tarifier des produits dérivés et d'obtenir la sensibilité (lettres grecques) de produits dérivés. Avec cet objectif en vue, les deux techniques présentées dans ce chapitre ont le point commun d'utiliser un algorithme très efficace, l'algorithme FFT (transformée de Fourier rapide ou *Fast Fourier Transform*), permettant justement l'obtention du prix de produits dérivés avec une très grande rapidité. Ces deux techniques requièrent seulement la fonction caractéristique d'un accroissement du logarithme du processus stochastique du modèle utilisé, celle-ci étant généralement disponible sous une forme fermée pour les processus de Lévy. L'algorithme s'applique particulièrement bien dans le modèle Variance Gamma étant donné que la distribution des log-rendements est connue analytiquement.

Carr *et al.* (1999) ont développé une technique faisant intervenir l'algorithme FFT pour valoriser des options européennes, particulièrement des options d'achat européennes, malgré que leurs résultats peuvent être généralisés pour de nombreux types de paiements. L'objectif de la méthode est d'approximer la valeur de l'option par une transformée de Fourier discrète (DFT) qui peut être résolue numériquement par l'algorithme FFT. Une fois la transformée de Fourier continue (CFT) de l'option trouvée, l'algorithme FFT permettra d'approximer la CFT en utilisant une DFT. L'avantage et la particularité de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir très rapidement les prix d'options d'achat

européennes pour de nombreux prix d'exercice différents. Par exemple, dans le modèle Variance Gamma, on peut obtenir le prix d'options d'achat pour  $2^{18}$  prix d'exercice différents en moins d'un dixième de secondes sur un ordinateur doté d'un processeur Intel Core i7.

Lord *et al.* (2008) ont quant à eux développé une méthode connue sous le nom de méthode de convolution. Cette méthode utilise l'approche des transformées de Fourier pour des options pouvant être exercées à de multiples instants durant la vie de l'option (options bermudiennes) ou à tout instant (options américaines). La méthode est très efficace pour les modèles de Lévy exponentiels, mais la méthode permet l'obtention du prix pour un prix d'exercice seulement comparativement à la méthode de Carr *et al.* (1999) qui génère de nombreux prix simultanément. On note cependant que le problème résolu par la méthode de convolution est d'une complexité largement supérieure à celle de la méthode de Carr *et al.* (1999) et que la méthode de convolution surpasse largement les méthodes Monte Carlo pour l'évaluation d'options américaines en terme d'efficacité.

On fait souvent référence à Cooley et Tukey (1965) comme les inventeurs de l'algorithme FFT, malgré que Gauss ait inventé cet algorithme d'interpolation en 1805, l'algorithme ayant été publié plus tard dans Gauss (1866). L'algorithme est utilisé depuis de nombreuses années dans de nombreux domaines dans lesquels le traitement des signaux est étudié tels que la physique, les télécommunications et l'optique. Les techniques présentées constituent donc des applications récentes de l'algorithme FFT à l'ingénierie financière.

On présente d'abord quelques notions de base sur les transformées de Fourier. On note cependant qu'on ne décrit pas l'algorithme FFT, mais on explique plutôt comment l'utiliser. Par la suite, les méthodes de Carr *et al.* (1999) et de convolutions sont présentées et appliquées.

## 4.2 Propriétés des transformées de Fourier

Si  $f(x)$  est dans l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad (4.1)$$

et que  $f(x)$  est continue, alors la transformée de Fourier (FT)

$$\hat{f}(u) = \mathcal{F}\{f\}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx, \quad (4.2)$$

existe.

La fonction  $f(x)$  peut être retrouvée à l'aide de la relation suivante :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \hat{f}(u) du. \quad (4.3)$$

Avant d'introduire la prochaine propriété, on rappelle que le conjugué d'un nombre complexe  $z = a + bi$  est égal à  $\bar{z} = a - bi$ . Le conjugué complexe d'une transformée de Fourier  $\hat{f}(u)$  est donné par la relation suivante :

$$\overline{\hat{f}(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \overline{f(x)} dx. \quad (4.4)$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que pour un nombre réel  $a$ ,  $a = \bar{a}$ , on a que

$$\overline{\hat{f}(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} f(x) dx = \hat{f}(-u). \quad (4.5)$$

Pour l'évaluation numérique, il est nécessaire de discrétiser les transformées de Fourier, ceci étant la raison expliquant l'utilisation des transformées de Fourier discrètes (DFT). Soit un vecteur de nombres complexes  $(x_n)_{n=0}^{N-1}$ , on peut écrire une transformée de Fourier discrète et son inverse de la façon suivante :

$$X_j = \mathcal{D}_j\{x_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{ijn2\pi/N} x_n, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (4.6)$$

$$x_n = \mathcal{D}_n^{-1}\{X_j\} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijn2\pi/N} X_j \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (4.7)$$

L'algorithme FFT permet d'évaluer très rapidement les transformées de Fourier discrètes. Il existe également une définition quelque peu similaire pour une transformée de Fourier discrète, la différence principale étant la présence d'un signe négatif devant  $i$ . Pour un vecteur de nombres complexes  $(x_j)_{j=1}^N$ , on peut également définir une transformée de Fourier discrète de la façon suivante :

$$X_k = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x_j, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.8)$$

L'évaluation de chaque  $X_k$  nécessite une sommation de  $N$  termes. Pour évaluer  $(X_k)_{k=1}^N$  sans optimisation, il faut donc  $N^2$  opérations complexes au total. L'algorithme FFT de Cooley-Turkey permet de diminuer ce nombre d'opérations en nécessitant plutôt  $(\frac{N}{2}) \log_2(N)$  lorsque  $N$  est une puissance de 2, ce qui augmente grandement l'efficacité de l'algorithme.

### 4.3 Méthode de Carr *et al.* (1999)

#### 4.3.1 Transformée de Fourier pour le prix d'une option

Soit  $R = (R_t)_{t \in [0, T]} = (\log S_t)_{t \in [0, T]}$ , le log-rendement de l'actif sous-jacent où  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est l'actif sous-jacent. Soit  $k = \log(K)$ , le logarithme naturel d'un prix d'exercice  $K$ , et  $C_T(k)$ , la valeur d'une option d'achat européenne d'échéance  $T$ . La densité de la distribution sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$  au temps  $t$  est notée par  $f_t(s)$ . La fonction caractéristique est définie comme étant

$$M_T(u) = \mathbb{E} [e^{iuR_T}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} f_T(s) ds. \quad (4.9)$$

La valeur initiale de l'option d'achat peut initialement s'écrire comme étant

$$\begin{aligned} C_T(k) &= e^{-rT} \mathbb{E} [(e^{R_T} - e^k)_+] \\ &= \int_k^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^k) f_T(s) ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Cependant, exprimée de cette façon, la valeur de l'option d'achat n'est pas dans l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ . En effet, si  $k \rightarrow -\infty$ , alors  $C_T(k) \rightarrow S_0$ . Voici la preuve :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\infty} C_T(k) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} e^s f_T(s) ds \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{R_T}] \\ &= S_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

On remarque donc que la valeur de l'option d'achat ne converge pas vers 0 lorsque  $k \rightarrow -\infty$ , et donc que  $C_T(k)$  n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R})$ . On utilise donc un prix d'option modifié

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k), \quad (4.12)$$

permettant ainsi d'obtenir une fonction dans  $L^1(\mathbb{R})$ , où  $\alpha > 0$ . Cette fonction modifiée assure donc l'existence de la transformée de Fourier pour un certain  $\alpha$  choisi de façon appropriée. La transformée de Fourier de cette fonction modifiée est la suivante :

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} c_T(k) dk. \quad (4.13)$$

La valeur de l'option d'achat peut être retrouvée en inversant la transformée de Fourier avec la relation de l'équation (4.3) :

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du. \quad (4.14)$$

La dernière égalité sera maintenant justifiée. On peut réécrire la valeur de l'option comme étant

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-iuk} \psi_T(u) du + \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du. \quad (4.15)$$

On peut maintenant développer le terme  $\frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-iuk} \psi_T(u) du$  :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-iuk} \psi_T(u) du &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{ivk} \psi_T(-v) dv \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} \overline{e^{-ivk} \psi_T(v)} dv \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du. \end{aligned} \quad (4.16)$$



La valeur de l'option d'achat est réelle, ce qui permet d'écrire que  $\overline{C_T(k)} = C_T(k)$ , d'où la dernière égalité. On peut finalement écrire que

$$\begin{aligned}
 C_T(k) &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-iuk} \psi_T(u) du + \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du \\
 &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du + \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du \\
 &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Il est possible de réexprimer la transformée de Fourier  $\psi_T(u)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} C_T(k) dk \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} \int_k^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^k) f_T(s) ds dk \\
 &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s (e^{(iu+\alpha)k} e^s - e^{(iu+\alpha+1)k}) dk f_T(s) ds \\
 &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{(iu+\alpha+1)s}}{iu + \alpha} - \frac{e^{(iu+\alpha+1)s}}{iu + 1 + \alpha} \right) f_T(s) ds \\
 &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(iu+\alpha+1)s}}{\alpha^2 + \alpha + iu(2\alpha + 1) - u^2} f_T(s) ds \\
 &= \frac{e^{-rT} M_T(u - i(\alpha + 1))}{\alpha^2 + \alpha + iu(2\alpha + 1) - u^2}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

On peut donc exprimer la valeur d'une option d'achat en substituant l'équation (4.18) dans l'équation (4.14), ce qui revient à dire que

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \frac{e^{-rT} M_T(u - i(\alpha + 1))}{\alpha^2 + \alpha + iu(2\alpha + 1) - u^2} du. \tag{4.19}$$

Pour une valeur de  $\alpha$  adéquate, on remarque d'abord qu'il faut que la condition suivante soit respectée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\alpha k} C_T(k)| dk < \infty. \tag{4.20}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |c_T(k)| dk &= \psi_T(0) \\
 &= \frac{e^{-rT} M_T(-(\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha} \\
 &= \frac{e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-(\alpha+1)iR_T}]}{\alpha^2 + \alpha} \\
 &= \frac{e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{(\alpha+1)R_T}]}{\alpha^2 + \alpha} \\
 &= \frac{e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T^{\alpha+1}]}{\alpha^2 + \alpha}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Alors, si  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T^{\alpha+1}] < \infty$ , on a aussi que  $\int_{-\infty}^{\infty} |c_T(k)| dk = \psi_T(0) < \infty$  et alors  $c_T(k)$  est dans l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ , ce qui permet d'inverser la transformée de Fourier. À partir de l'expression analytique de la fonction caractéristique, il est donc possible de déterminer une borne supérieure pour  $\alpha$ .

#### 4.3.2 Erreur de troncature

On considère maintenant le problème de l'erreur de troncature qui consiste à déterminer l'erreur causée par la borne  $a$  choisie lors de l'estimation de

$$\frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du \tag{4.22}$$

par l'intégrale

$$\frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^a e^{-iuk} \psi_T(u) du. \tag{4.23}$$

L'intégrale (4.23) est estimée par une approximation discrète et le résultat de l'intégrale sur l'intervalle  $[a, \infty]$  est négligé, ce qui rend donc important de connaître l'erreur commise. Avant de calculer l'erreur de troncature, on présente d'abord deux résultats d'analyse qui seront utiles pour établir des inégalités. Pour une fonction intégrable  $f(x)$ , on a que

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)| dx, \tag{4.24}$$

et pour tout nombre réel  $x$ , on a que

$$|e^{ix}| = 1. \tag{4.25}$$

L'erreur de troncature  $\epsilon$  est la suivante :

$$\epsilon = \left| \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_a^\infty e^{-iuk} \psi_T(u) du \right| \leq \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_a^\infty |e^{-iuk} \psi_T(u)| du = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_a^\infty |\psi_T(u)| du. \quad (4.26)$$

On a aussi que

$$\begin{aligned} |M_T(u - (\alpha + 1)i)| &= \left| \int_{-\infty}^\infty e^{ius} e^{(\alpha+1)s} f_T(s) ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^\infty |e^{ius} e^{(\alpha+1)s} f_T(s)| ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty |e^{(\alpha+1)s} f_T(s)| ds \\ &= \mathbb{E}[S_T^{\alpha+1}]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

On note aussi que pour un nombre complexe  $z = a + bi$ , la valeur absolue est égale à  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . On peut maintenant établir une borne explicite pour l'erreur de troncature  $\epsilon$  en utilisant l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_a^\infty |\psi_T(u)| du \\ &\leq \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_a^\infty \frac{\mathbb{E}[S_T^{\alpha+1}]}{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha - u^2)^2 + u^2(2\alpha + 1)^2}} du \\ &\leq \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_a^\infty \frac{\mathbb{E}[S_T^{\alpha+1}]}{u^2} du \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi a} \mathbb{E}[S_T^{\alpha+1}]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Alors, pour une erreur d'au plus  $\epsilon$ , il faut choisir une borne  $a$  telle que

$$a \geq \frac{e^{-\alpha k} \mathbb{E}[S_T^{\alpha+1}]}{\pi \epsilon}. \quad (4.29)$$

### 4.3.3 Discrétisation

Dans le cas qui nous intéresse, on cherche à discrétiser

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iuk} \psi_T(u) du, \quad (4.30)$$

et tel que mentionné dans la section précédente, on évalue cette intégrale sur un intervalle en posant une borne  $a$ , ce qui revient à estimer

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^a e^{-iuk} \psi_T(u) du. \quad (4.31)$$

L'intégrale de (4.31) est maintenant discrétisée et on peut écrire la valeur de l'option d'achat comme étant

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iu_j k} \psi_T(u_j) h, \quad (4.32)$$

où  $u_j, j = 1, \dots, N$ , sont les points discrets utilisés pour l'approximation et  $h = \frac{a}{N}$  est l'espacement entre les valeurs discrètes de  $u_j$  dans la sommation. Étant donné qu'on prend des espacements constants entre les différentes valeurs de  $u_j$ , on a que  $u_j = h(j-1)$ . L'algorithme permet d'obtenir un vecteur donnant  $N$  valeurs de l'option pour différents prix d'exercice. Dans leur article, Carr *et al.* (1999) ont choisi d'exprimer les différentes valeurs de  $k$  de la façon suivante :

$$k(l) = -b + \lambda(l-1), \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.33)$$

ce qui nous permet d'obtenir les prix de l'option dans l'intervalle  $[-b, b]$  lorsqu'on pose

$$b = \frac{1}{2} N \lambda. \quad (4.34)$$

L'équation (4.32) peut maintenant être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_T(k(l)) &= \frac{e^{-\alpha k(l)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iu_j(-b+\lambda(l-1))} \psi_T(u_j) h, \quad l = 1, \dots, N \\ &= \frac{e^{-\alpha k(l)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda u_j(l-1)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) h, \quad l = 1, \dots, N \\ &= \frac{e^{-\alpha k(l)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda h(j-1)(l-1)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) h, \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pour appliquer l'algorithme FFT et obtenir une sommation de la forme de celle de l'équation (4.8), il faut que la condition

$$\lambda h = \frac{2\pi}{N} \quad (4.36)$$

soit respectée. Alors,

$$\begin{aligned} C_T(k(l)) &= \frac{e^{-\alpha k(l)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(l-1)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) h, \quad l = 1, \dots, N \\ &= \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(l-1)} x_j, \quad l = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.37)$$

où

$$x_j = \frac{e^{-\alpha k(l)}}{\pi} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) h. \quad (4.38)$$

Il s'agit donc d'une sommation permettant d'appliquer l'algorithme FFT.

#### 4.3.4 Application de la méthode dans le modèle Variance Gamma

L'application de la méthode dans le modèle Variance Gamma est directe et se fait à partir de la définition de la fonction caractéristique du processus Variance Gamma telle que définie par la formule (1.12). Cependant, cette formule nous donne la fonction caractéristique pour le processus Variance Gamma  $X_T$  alors qu'il nous faut celle de  $R_T = \log(S_T)$ .

On calcule maintenant la fonction caractéristique de  $R_T$  :

$$\begin{aligned} M_T(u) &= \mathbb{E} \left[ e^{iu \log(S_T)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{iu(\log(S_0) + (r-\omega)T + X_T)} \right] \\ &= e^{iu(\log(S_0) + (r-\omega)T)} \mathbb{E} \left[ e^{iuX_T} \right] \\ &= e^{iu(\log(S_0) + (r-\omega)T)} (1 - iu\theta\nu + u^2\sigma^2\nu/2)^{-T/\nu}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

On note que la fonction caractéristique donnée dans Carr *et al.* (1999) est fausse. La prochaine étape est de déterminer la fonction  $\psi_T(u)$ . Pour ce faire, on évalue d'abord  $M_T(u - i(\alpha + 1))$  :

$$M_T(u - i(\alpha + 1)) = e^{(iu + \alpha + 1)(\log(S_0) + (r-\omega)T)} (1 - (\alpha + 1)\theta\nu - (\alpha + 1)^2\sigma^2\nu/2)^{-T/\nu}. \quad (4.40)$$

Finalement, de l'équation (4.18), on obtient que

$$\begin{aligned} \psi_T(u) &= \\ &= \frac{\exp(-rT + (iu + \alpha + 1)(\log(S_0) + (r-\omega)T)) (1 - (\alpha + 1)\theta\nu - (\alpha + 1)^2\sigma^2\nu/2)^{-T/\nu}}{\alpha^2 + \alpha + iu(2\alpha + 1) - u^2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

### 4.3.5 Pseudo-code pour appliquer la méthode

Dans le pseudo-code 6, on présente le pseudo-code pour appliquer la méthode dans le cas du modèle Variance Gamma, mais d'abord quelques notes utiles sont données. D'abord, étant donné le nombre important de prix générés pour différents prix d'exercice par la méthode FFT, on définit les prix d'exercice désirés en sortie par la matrice  $[K^{(1)} \dots K^{(n)}]$ .  $N$  devrait être une puissance de 2 pour une meilleure efficacité, tel que mentionné précédemment. Plusieurs logiciels incluent des fonctions permettant d'appliquer l'algorithme FFT. Dans le cas de Matlab, les fonctions **fft**(·) et **ifft**(·) permettant d'évaluer des transformées de Fourier discrètes et leurs inverses respectivement. Une fois tous les prix générés dans le code à l'aide de la fonction **fft**(·) dans la matrice appelée *prixComplet*, on effectue une interpolation linéaire pour obtenir les prix auxquels on s'intéresse dans une matrice appelée *prix*. Dans le logiciel Matlab, la fonction faisant automatiquement les calculs d'interpolation se nomme **interp1**. Enfin, le seul ajustement nécessaire au code présenté pour d'autres modèles de Lévy exponentiels est au niveau de la fonction caractéristique du processus qui serait différente.

**Pseudo-code 6** (Tarification d'une option d'achat européenne à l'aide de l'algorithme FFT dans le modèle Variance Gamma avec les paramètres  $S_0, (K^{(1)} \dots K^{(n)}), T, r, \theta, \sigma, \nu, \alpha, N$  et  $a$ ).

```

logS ← log(S0),  logK ← [log(K(1)) ... log(K(n))]
h ←  $\frac{a}{N}$ ,  λ ←  $\frac{2\pi}{Nh}$ ,  b ←  $\frac{N\lambda}{2}$ 
indiceL ← [1 ... N]
kL ← -b + λ(indiceL - 1)
MT(u) ← eiu(log(S0)+(r-ω)T) (1 - iuθν + u2σ2ν/2)-T/ν
ψT(u) ←  $\frac{e^{-rT} M_T(u - i(\alpha+1))}{\alpha^2 + \alpha + iu(2\alpha+1) - u^2}$ 
indiceJ ← [1 ... N]
uJ ← (indiceJ - 1)h
xJ ←  $\frac{h}{\pi} [\exp(-\alpha(kL[1]) + ib(uJ[1])) \psi_T(uJ[1]) \dots$ 
 $\exp(-\alpha(kL[N]) + ib(uJ[N])) \psi_T(uJ[N])]$ 
prixCompleet ← fft(xJ)
prix ← interpolate(kL, prixCompleet, logK)

```

#### 4.3.6 Évaluation de lettres grecques

En revenant à la version continue de l'expression du prix, énoncée dans l'équation (4.30), on remarque qu'il suffit de dériver cette expression par rapport à un paramètre d'intérêt pour obtenir le calcul d'une sensibilité par la méthode de Carr *et al.* (1999). En supposant qu'il est possible d'interchanger les ordres de dérivation et d'intégration, on remarquera que le terme à dériver est en fait  $\psi_T(u)$ . En développant davantage le calcul, on trouvera également qu'il n'est seulement nécessaire que de dériver la fonction caractéristique  $M_T(u)$ . Le calcul de la lettre grecque se fera simplement en travaillant avec cette dérivée plutôt que la fonction caractéristique, la démarche précédemment développée restera donc pratiquement intacte. Supposons qu'on désire évaluer la sensibilité du prix par rapport à un paramètre d'intérêt  $\theta$ . On cherche donc à évaluer la quantité suivante :

$$\frac{\partial C_T(k, \theta)}{\partial \theta} = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iuk} \frac{\partial \psi_T(u, \theta)}{\partial \theta} du. \quad (4.42)$$

On poursuit la démarche en calculant la dérivée de la fonction  $\psi_T(u, \theta)$  :

$$\frac{\partial \psi_T(u, \theta)}{\partial \theta} = \frac{e^{-rT}}{\alpha^2 + \alpha + iu(2\alpha + 1) - u^2} \frac{\partial M_T(u - i(\alpha + 1), \theta)}{\partial \theta}, \quad (4.43)$$

et on remarque que

$$\frac{\partial M_T(u, \theta)}{\partial \theta} \quad (4.44)$$

constitue la dérivée à évaluer pour évaluer les sensibilités.

On s'intéresse maintenant au calcul du delta ( $\Delta$ ) et du gamma ( $\Gamma$ ) dans le modèle Variance Gamma. En utilisant la fonction caractéristique de  $R_T = \log(S_T)$  telle que définie dans l'équation (4.39), on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_T(u, S_0)}{\partial S_0} &= \frac{iu}{S_0} M_T(u, S_0) \\ \frac{\partial^2 M_T(u, S_0)}{\partial S_0^2} &= \frac{iu - u^2}{S_0^2} M_T(u, S_0). \end{aligned} \quad (4.45)$$

En substituant ces dérivées dans l'équation (4.43) et en appliquant la relation (4.42) par la suite, on peut évaluer le delta ( $\Delta$ ) et le gamma ( $\Gamma$ ) de l'option, respectivement. On note que la relation est également vraie pour les dérivées d'ordre 2, notamment nécessaire pour le calcul du ( $\Gamma$ ). Pour les autres paramètres du modèle Variance Gamma ( $\theta, \nu, \sigma$ ), on peut appliquer la même démarche, les dérivées se calculant facilement. Enfin, le résultat trouvé pour le delta ( $\Delta$ ) et le gamma ( $\Gamma$ ) peut se généraliser pour d'autres modèles de Lévy exponentiels.

## 4.4 La méthode de convolution

### 4.4.1 Introduction à la méthode de convolution

La méthode présentée précédemment permet seulement la tarification d'options vanilles du type européen. La méthode de convolution développée par Lord *et al.* (2008) permet de tarifier des options dans le cas où le détenteur peut exercer son droit avant l'échéance de l'option. Cette méthode traite du cas des options bermudiennes, des options pouvant être exercées à certains instants discrets fixés lors de l'émission de l'option. En prenant un



grand nombre d'instants discrets, la méthode permet également d'évaluer la valeur d'options américaines ou, à tout le moins, de s'approcher de la valeur américaine de l'option. La méthode de convolution utilise l'algorithme FFT, ce qui rend celle-ci très efficace. Les conditions nécessaires pour appliquer la méthode sont que les accroissements du processus stochastique incorporé dans la dynamique de l'actif sous-jacent soient indépendants et, comme pour la technique de Carr *et al.* (1999), que la fonction caractéristique soit connue. Pour les processus de Lévy, par définition, la première condition est respectée et, pour de nombreux exemples de processus, la deuxième condition est respectée.

#### 4.4.2 Notation

On présente la notation qui sera utilisée pour la méthode de convolution. L'ensemble des dates d'exercice possibles est donné par la partition  $\mathcal{T}$  du temps suivante :

$$\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_M\}, \quad (4.46)$$

où  $t_0 = 0$  et  $t_M = T$ , l'échéance de l'option. Pour des raisons de simplicité, on suppose que tous les pas de temps sont égaux, c'est-à-dire que  $t_{m+1} - t_m = \Delta t$ . Une option pouvant être exercée seulement à certains instants discrets, soit un instant d'exercice  $\tau \in \mathcal{T}$  dans notre cas, est par définition une option bermudienne. En prenant un  $M$  de grande taille, c'est-à-dire en partitionnant finement les instants d'exercice possibles, il est possible d'approximer le prix de la version américaine de l'option, soit une option où l'instant d'exercice est tel que  $\tau \in [0, T]$ . Soit  $V_{t_m}(S_{t_m})$ , la *valeur* d'une option bermudienne au temps  $t_m$ ,  $F_{t_m}(S_{t_m})$ , la valeur de *continuation* d'une option bermudienne au temps  $t_m$  et  $H(S_{t_m})$ , le *paiement* d'une option bermudienne au temps  $t_m$ . Le problème à résoudre pour obtenir la valeur d'une option bermudienne est le suivant :

$$V_T(S_T) = H(S_T), \quad (4.47)$$

$$F_{t_m}(S_{t_m}) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^Q [V_{t_{m+1}}(S_{t_{m+1}}) | S_{t_m}], m = M-1, \dots, 1, \quad (4.48)$$

$$V_{t_m}(S_{t_m}) = \max(F_{t_m}(S_{t_m}), H(S_{t_m})), m = M-1, \dots, 1, \quad (4.49)$$

$$V_{t_0}(S_{t_0}) = F_{t_0}(S_{t_0}) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^Q [H(S_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_1}]. \quad (4.50)$$

### 4.4.3 Construction de la méthode

En écrivant l'actif sous-jacent avec la notation de l'équation (2.5), on trouve que

$$R_t = \log S_t = \log S_0 + (r - \omega) t + L_t, \quad (4.51)$$

et on a donc que  $R$  est un processus de Lévy auquel on ajoute une fonction linéaire du temps, ce qui implique que  $R$  est également un processus de Lévy. En écrivant les accroissements de  $R$  sur la partition du temps  $\mathcal{T}$ , on peut définir le vecteur d'un accroissement  $\tilde{R}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= (R_{t_1}, R_{t_2} - R_{t_1}, \dots, R_{t_m} - R_{t_{m-1}}, \dots, R_{t_M} - R_{t_{M-1}}) \\ &\equiv (\tilde{R}_{t_1}, \tilde{R}_{t_2}, \dots, \tilde{R}_{t_m}, \dots, \tilde{R}_{t_M}). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Un des éléments sur lesquels la méthode de convolution est basée est le fait que les densités prises sous la mesure  $\mathbb{Q}$  respectent la relation suivante :

$$h_{R_{t_{m+1}}|R_{t_m}}(s_{t_{m+1}}|s_{t_m}) = h_{\tilde{R}_{t_{m+1}}}(\tilde{s}_{t_{m+1}}), \quad (4.53)$$

où  $\tilde{R}_{t_{m+1}} = R_{t_{m+1}} - R_{t_m}$ . En notant que tous les accroissements ont des intervalles de temps  $\Delta t$  égaux, on obtient que les densités de tous les accroissements sont égales. *On suppose maintenant que les fonctions  $V_{t_m}(\cdot)$ ,  $F_{t_m}(\cdot)$  et  $H(\cdot)$  sont des fonctions du logarithme du prix  $R_{t_m} = \log S_{t_m}$  plutôt que du prix  $S_{t_m}$ .* En notant la densité sur un intervalle de temps simplement par  $h(\cdot)$  plutôt que par  $h_{R_{t_{m+1}}|R_{t_m}}(s_{t_{m+1}}|s_{t_m})$ , la valeur de continuation au temps  $t_m$  est la suivante :

$$F_{t_m}(s_{t_m}) = e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} V_{t_{m+1}}(s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}}) h(\tilde{s}_{t_{m+1}}) d\tilde{s}_{t_{m+1}}. \quad (4.54)$$

La relation de l'équation (4.54) peut sembler simple à évaluer à première vue, mais pour de nombreux processus, la densité  $h(\cdot)$  n'est pas connue ou fait intervenir des fonctions spéciales tel que pour le processus Variance Gamma. Par contre, les fonctions caractéristiques sont connues pour de nombreux modèles par des expressions relativement simples.

On utilise désormais la convention que les valeurs écrites avec une lettre minuscule sont des valeurs modifiées, c'est-à-dire que  $f_{t_m}(x) = e^{\alpha x} F_{t_m}(x)$  et que  $v_{t_m}(x) = e^{\alpha x} V_{t_m}(x)$ .

La transformée de Fourier de la valeur modifiée de la valeur de continuation, en utilisant le résultat de l'équation (4.54), est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_{t_m}\}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iust_m} e^{\alpha s_{t_m}} e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} V_{t_{m+1}}(s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}}) h(\tilde{s}_{t_{m+1}}) d\tilde{s}_{t_{m+1}} ds_{t_m} \\
&= e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iust_m} e^{\alpha s_{t_m}} e^{-\alpha(s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}})} v_{t_{m+1}}(s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}}) h(\tilde{s}_{t_{m+1}}) d\tilde{s}_{t_{m+1}} ds_{t_m} \\
&= e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}})} v_{t_{m+1}}(s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}}) h(\tilde{s}_{t_{m+1}}) e^{i(\alpha - u)\tilde{s}_{t_{m+1}}} d\tilde{s}_{t_{m+1}} ds_{t_m}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

En faisant le changement de variable  $s_{t_{m+1}} = s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}}$  et en changeant l'ordre d'intégration, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_{t_m}\}(u) &= e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iust_{m+1}} v_{t_{m+1}}(s_{t_{m+1}}) h(\tilde{s}_{t_{m+1}}) e^{i(\alpha - u)\tilde{s}_{t_{m+1}}} ds_{t_{m+1}} d\tilde{s}_{t_{m+1}} \\
&= e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iust_{m+1}} v_{t_{m+1}}(s_{t_{m+1}}) ds_{t_{m+1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha - u)\tilde{s}_{t_{m+1}}} h(\tilde{s}_{t_{m+1}}) d\tilde{s}_{t_{m+1}} \\
&= e^{-r\Delta t} \mathcal{F}(e^{\alpha s_{t_{m+1}}} V_{t_{m+1}})(u) \cdot M_{\tilde{R}_{t_{m+1}}}(i\alpha - u),
\end{aligned} \tag{4.56}$$

où  $M_{\tilde{R}_{t_{m+1}}}(u)$  représente la fonction caractéristique de  $\tilde{R}_{t_{m+1}}$ . La différence par rapport à l'approche de Carr *et al.* (1999) dans le calcul (4.18) est que la transformée de Fourier est maintenant calculée par rapport au logarithme du prix du sous-jacent plutôt que par rapport au logarithme du prix d'exercice. Pour des raisons d'intégrabilité, l'utilisation d'un coefficient  $\alpha$  est encore une fois nécessaire. On remarque que le résultat de (4.56) permet le calcul de la transformée de Fourier de la valeur de continuation modifiée  $f_{t_m}(s_{t_m})$  par le biais du calcul du produit de deux fonctions, dont une de ces fonctions, une fonction caractéristique, est connue sous une forme fermée.

Pour retrouver la valeur de continuation, la prochaine étape consiste à inverser la transformée de Fourier (4.56) et, par la suite, la valeur de l'option est calculée comme le maximum de la valeur d'exercice et de la valeur de continuation. L'inversion de la transformée de Fourier de la valeur de continuation modifiée donne le résultat suivant :

$$f_{t_m}(x) = \frac{e^{-r\Delta t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \hat{v}_{t_{m+1}}(u) M_{\tilde{R}_{t_{m+1}}}(i\alpha - u) du, \tag{4.57}$$

où  $\hat{v}_{t_{m+1}}(u)$  est la transformée de Fourier de  $v_{t_{m+1}}(u)$ , autrement dit :

$$\hat{v}_{t_{m+1}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} v_{t_{m+1}}(y) dy. \quad (4.58)$$

On travaille dorénavant avec les équations (4.57) et (4.58), car ce sont ces équations qui constituent la clé de voûte qui nous permettra d'évaluer les valeurs d'options. En effet, ces équations une fois discrétisées, il sera alors possible d'appliquer l'algorithme FFT pour le calcul numérique de la valeur de l'option. Tel qu'indiqué dans les équations (4.57) et (4.58), on utilise maintenant  $x$  et  $y$  pour représenter les réalisations possibles de  $R_{t_m} = \log S_{t_m}$  et de  $R_{t_{m+1}} = \log S_{t_{m+1}}$  respectivement.

Il est nécessaire de calculer les valeurs de continuation pour différents prix possibles, autrement dit, il faut calculer  $f_{t_m}(x)$  pour plusieurs valeurs de  $x$ . On discrétise donc les valeurs possibles de  $x$  sur une grille qu'on appelle *grille- $x$* . Lors de chaque évaluation de  $f_{t_m}(x)$ , il faut évaluer l'intégrale (4.57) numériquement, ce qui implique qu'il faut également implanter une grille contenant les valeurs possibles de  $u$ , la grille appelée *grille- $u$* . Et, enfin, l'intégrale (4.58) doit elle aussi être évaluée, ce qui implique la nécessité d'une troisième grille contenant les valeurs possibles de  $y$ , la grille appelée *grille- $y$* . Voici donc ces grilles :

$$u_j = u_0 + j\Delta u, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (4.59)$$

$$x_j = x_0 + j\Delta x, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (4.60)$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (4.61)$$

Pour appliquer l'algorithme FFT tel que spécifié dans l'équation (4.8), on a que

$$\Delta u \cdot \Delta y = \frac{2\pi}{N}, \quad \Delta y = \Delta x. \quad (4.62)$$

Pour alléger la notation, on laisse maintenant tomber les indices des fonctions  $M(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  et  $\hat{v}(\cdot)$ . La fonction  $M(\cdot)$  est la même pour tous les accroissements étant donné que ceux-ci sont sur des accroissements de temps de la même longueur. Une fois les équations (4.58) et (4.57) discrétisées, on a que :

$$f_{t_m}(x_p) \approx \frac{e^{-r\Delta t}}{2\pi} \Delta u \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j x_p} M(i\alpha - u_j) \hat{v}(u_j), \quad (4.63)$$

où  $p = 0, \dots, N - 1$ , et que

$$\hat{v}(u_j) \approx \Delta y \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iu_j y_n} v(y_n). \quad (4.64)$$

La règle d'intégration trapézoïdale est appliquée et le choix des poids  $w_n$  est le suivant :

$$w_0 = 0.5, \quad w_{N-1} = 0.5, \quad w_n = 1, \quad n = 1, \dots, N - 2. \quad (4.65)$$

En utilisant les grilles telles que définies par les équations (4.59), (4.60) et (4.61), on peut réécrire les équations (4.63) et (4.64) de la façon suivante :

$$f_{t_m}(x_p) \approx \frac{e^{-r\Delta t} e^{-iu_0(x_0+p\Delta x)}}{2\pi} \Delta u \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijp2\pi/N} e^{-ijx_0\Delta u} M(i\alpha - (u_0 + j\Delta u)) \hat{v}(u_j), \quad (4.66)$$

$$\hat{v}(u_j) \approx e^{iu_0 y_0} \Delta y \sum_{n=0}^{N-1} e^{ij2\pi/N} e^{inu_0\Delta y} e^{ijy_0\Delta u} w_n v(y_0 + n\Delta y). \quad (4.67)$$

#### 4.4.4 Troncature

L'intégrale (4.54) doit être tronquée pour l'évaluation numérique, ce qui revient à dire que l'intégrale est évaluée sur un intervalle  $[-a/2, a/2]$  :

$$F_{t_m}(s_{t_m}) \approx e^{-r\Delta t} \int_{-a/2}^{a/2} V_{t_{m+1}}(s_{t_m} + \tilde{s}_{t_{m+1}}) h(\tilde{s}_{t_{m+1}}) d\tilde{s}_{t_{m+1}}. \quad (4.68)$$

Lord *et al.* (2008) recommandent de choisir  $a$  comme un multiple de l'écart-type de  $R_{t_m} = \log S_{t_m}$ , tout en s'assurant que la masse à l'extérieur de la région considérée est négligeable. À l'aide des moments calculés dans la section (1.6), on obtient directement l'écart-type dans le cas du modèle Variance Gamma. Pour d'autres modèles, une approche plus simple est d'obtenir l'écart-type en passant par la fonction génératrice des moments, celle-ci permettant d'obtenir les moments en calculant la dérivée. Une façon de choisir  $a$  serait donc de poser  $a$  de telle sorte que

$$a = \delta \cdot \sqrt{-\left. \frac{\partial^2 M(u)}{\partial u^2} \right|_{u=0} + \left( \left. \frac{\partial M(u)}{\partial u} \right|_{u=0} \right)^2}, \quad (4.69)$$

où  $\delta$  est une constante de proportionnalité qu'on suggère de choisir de telle sorte que  $\delta \in [4, 8]$ . Dans la section suivante, on décrit les compromis à faire lorsque l'on choisit la valeur de  $a$ . Étant donné que  $a$  est évalué une fois seulement, on l'évalue pour la valeur de  $R_{t_m}$  ayant le plus grand écart-type, soit la valeur terminale  $R_{t_M}$ .

#### 4.4.5 Ajustement de la grille

L'objectif de cette section est de définir clairement le système de grilles qui est utilisé pour la tarification de produits dérivés. Dans les équations (4.59), (4.60) et (4.61), un système de grilles a été élaboré, mais la définition des grilles ne spécifie pas comment utiliser concrètement les grilles. Dans cette section, on présente une définition du système de grilles permettant d'intégrer numériquement sur l'intervalle tel que défini dans la section 4.4.4 tout en respectant les conditions nécessaires à l'application de l'algorithme FFT. On traite aussi de la problématique des discontinuités et comment ajuster le système de grilles pour éviter les erreurs d'évaluation induites par les discontinuités.

Étant donné que la *grille-x* et la *grille-y* contiennent les réalisations possibles du logarithme du prix aux temps  $t_m$  et  $t_{m+1}$  respectivement, ces grilles doivent couvrir l'intervalle  $[-a/2, a/2]$ , ce qui explique le choix suivant :

$$\Delta x = \Delta y = a/N. \quad (4.70)$$

Les équations (4.70) et (4.62) font en sorte que la valeur de  $\Delta u$  est la suivante :

$$\Delta u = \frac{2\pi}{a}. \quad (4.71)$$

Une première version modifiée de la grille serait donc la suivante :

$$u_j = -\frac{N}{2}\Delta u + j\Delta u, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (4.72)$$

$$x_j = y_j = -\frac{a}{2} + j\Delta y, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (4.73)$$

On note que dans Lord *et al.* (2008), pour les grilles (4.72) et (4.73) ainsi que pour l'application concrète de la méthode, il est décidé de travailler avec les log-rendements plutôt qu'avec les logarithmes du prix. Il est surprenant que ce choix n'ait pas été

fait dès les premiers développements théoriques de la méthode, par souci d'uniformité. L'ajustement est très simple, en effet, on a que

$$x = \log \left( \frac{S_{t_m}}{S_0} \right) \Leftrightarrow S_{t_m} = S_0 e^x. \quad (4.74)$$

Tel que mentionné à la fin de la section 4.4.4, un compromis doit être fait lors du choix de  $a$ . En effet, le domaine d'intégration de la *grille-u* est de

$$[u_0, u_{N-1}] = \left[ -\frac{\pi N}{a}, \frac{\pi(N-2)}{a} \right], \quad (4.75)$$

ce qui fait en sorte que plus  $a$  est grand, plus le domaine d'intégration de la *grille-u* est limité et plus l'erreur de troncature est réduite.

On présente les ajustements nécessaires pour éviter les erreurs d'évaluation qui pourraient être causées par les discontinuités. Pour ce faire, on élabore un design de grilles pour éviter ces erreurs et on note que ce système sera dynamique, les grilles seront donc modifiées à plusieurs reprises lors de l'évaluation d'un produit dérivé. La motivation derrière la méthodologie qui sera proposée est qu'il est connu que lorsqu'une méthode numérique est employée pour évaluer une intégrale, les points discontinus de la fonction à intégrer devraient se situer sur la grille discrète du domaine d'intégration, ce qui permet de séparer le problème d'intégration en une intégration de plusieurs fonctions continues sur différents domaines d'intégration. La *grille-x* et la *grille-y* sont donc décalées pour s'assurer de placer les discontinuités sur les grilles. Le système de grille devient donc le suivant :

$$u_j = -\frac{N}{2} \Delta u + j \Delta u, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (4.76)$$

$$x_j = \epsilon_x - \frac{a}{2} + j \Delta y, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (4.77)$$

$$y_j = \epsilon_y - \frac{a}{2} + j \Delta y, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (4.78)$$

où

$$\epsilon_x = d_m^x - \left\lfloor \frac{d_m^x}{\Delta x} \right\rfloor \Delta x \quad \text{et} \quad \epsilon_y = d_m^y - \left\lfloor \frac{d_m^y}{\Delta y} \right\rfloor \Delta y, \quad (4.79)$$

et  $d_m^x$  et  $d_m^y$  sont les points de discontinuités. Ces points de discontinuités doivent être trouvés, on présente donc comment procéder pour y arriver.

Il existe une discontinuité au niveau de la fonction du paiement terminal pour de nombreuses options. Par exemple, pour des options *cash-or-nothing*, ( paiement de  $S_T \mathbb{I}_{S_T > K}$  où  $T$  représente l'échéance ) et *asset-or-nothing* ( paiement de  $\mathbb{I}_{S_T > K}$  ), il existe une discontinuité lorsque  $S_T = K$ . Pour des options d'achat et de vente, il n'existe pas de discontinuité au point  $S_T = K$  malgré que la fonction de paiement ne soit pas dérivable en ce point. Concrètement, pour tenir compte de la discontinuité au point  $S_T = K$ , on pose que  $d_M^y = \log(K/S_0)$  et aucune modification de la *grille-x* n'est nécessaire, ce qui implique que  $\epsilon_x = 0$ . On remarque que cet ajustement n'est nécessaire qu'une seule fois, soit à la valeur terminale  $t_M = T$ . Cette méthode permet de tenir compte d'une seule discontinuité à l'échéance, ce qui est suffisant pour de nombreuses options, surtout les plus transigées, et on se limite donc à ce cas dans le présent ouvrage.

En de nombreux points, il est nécessaire d'évaluer la valeur de l'option comme le maximum de la valeur de continuation et de l'exercice prématuré, soit

$$V_{t_m}(x) = \max(F_{t_m}(x), H_{t_m}(x)). \quad (4.80)$$

Dans le cas où

$$F_{t_m}(x) = H_{t_m}(x), \quad (4.81)$$

il y aura donc une discontinuité contenue dans un intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ . Une fois cet intervalle connu, on s'intéresse à calculer la valeur de  $x_j < d_m^x < x_{j+1}$ , ce qui permettra par la suite de décaler la *grille-x* pour s'assurer que  $d_m^x$  figure sur la grille ;  $d_m^x$  est souvent appelé frontière d'exercice dans la littérature. Cet ajustement doit être fait aux temps  $\{t_1, \dots, t_{M-1}\}$ , soit tous les instants discrets, à l'exception du temps de la maturité du produit dérivé. Pour estimer  $d_m^x$ , on a recours à une interpolation linéaire, c'est-à-dire qu'on estime donc  $d_m^x$  de la façon suivante :

$$d_m^x \approx \frac{x_{j+1}(F_{t_m}(x_j) - H(x_j)) - x_j(F_{t_m}(x_{j+1}) - H(x_{j+1}))}{(F_{t_m}(x_j) - H(x_j)) - (F_{t_m}(x_{j+1}) - H(x_{j+1}))}. \quad (4.82)$$

#### 4.4.6 Code de la méthode

Dans cette section, on présente le pseudo-code de la méthode pour la tarification d'options d'achat bermudiennes dans le cas d'une grille constante. Le pseudo-code en question



est le pseudo-code 7. Un élément important à noter est que la définition de transformée de Fourier discrète est différente que dans la section précédente. Par ailleurs, les définitions des équations (4.6) et (4.7) sont différentes que celles de Matlab. Ainsi, lorsque dans la théorie, on indique qu'on utilise une transformée de Fourier discrète, dans un code Matlab (et dans le pseudo-code fourni également), il s'agit plutôt de l'inverse de celle-ci et on applique le même raisonnement pour l'inverse d'une transformée de Fourier discrète. Selon le cas, il faudrait normalement multiplier ou diviser par  $N$ , mais, pour l'expression de la valeur de continuation, ces opérations s'annulent. Le pseudo-code présenté est général puisqu'il être appliqué pour différentes fonctions caractéristiques. En effet, le pseudo-code pourrait s'ajuster au modèle spécifié en prenant la fonction caractéristique dans une banque de fonction caractéristiques, par exemple, ce qui permettrait d'évaluer des options bermudiennes pour de nombreux processus de Lévy exponentiels. Pour cette raison, dans le pseudo-code, on n'indique pas de paramètres propres à un modèle en particulier, malgré que pour programmer la méthode ceux-ci soient nécessaires pour évaluer la fonction caractéristique.

**Pseudo-code 7** (Tarification d'une option d'achat bermudienne à l'aide de l'algorithme FFT avec les paramètres  $S_0, T, r, K, \alpha, L, N, M$  ).

```

 $\Delta t \leftarrow \frac{T}{M}, \Delta y \leftarrow \frac{L}{N}, \Delta x \leftarrow \Delta y, \Delta u \leftarrow \frac{2\pi}{L}$ 
 $indice \leftarrow [0 \dots N - 1]'$ 
 $yJ \leftarrow indice \cdot \Delta y - \frac{N\Delta y}{2}$ 
 $xJ \leftarrow yJ$ 
 $uJ \leftarrow indice \cdot \Delta u - \frac{N\Delta u}{2}$ 
 $w_{N \times 1} \leftarrow [1 \dots 1]', w_{N \times 1}[1] \leftarrow \frac{1}{2}, w_{N \times 1}[N] \leftarrow \frac{1}{2}$ 
 $v \leftarrow [e^{\alpha xJ[1]} \max(S_0 e^{xJ[1]} - K, 0) \dots e^{\alpha xJ[N]} \max(S_0 e^{xJ[N]} - K, 0)]$ 
 $fctCar \leftarrow [M(i\alpha - uJ[1]) \dots M(i\alpha - uJ[N])]$ 
 $FFT \leftarrow \text{fft}([ (e^{indice[1](yJ[1]-xJ[1])\Delta u}) \dots (e^{indice[N](yJ[1]-xJ[1])\Delta u}) ])$ 
 $IFFT \leftarrow \text{ifft}([ ((-1)^{indice[1]} \cdot w[1] \cdot u[1]) \dots ((-1)^{indice[N]} \cdot w[N] \cdot v[N]) ])$ 
for  $m \leftarrow M - 1$  to 1
  do  $\begin{cases} F \leftarrow e^{-r\Delta t} [e^{-\alpha xJ[1]+i uJ[1](yJ[1]-xJ[1])} (-1)^{indice[1]} \cdot FFT[1] \cdot fctCar[1] \cdot IFFT[1] \\ \dots e^{-\alpha xJ[N]+i uJ[N](yJ[1]-xJ[1])} (-1)^{indice[N]} \cdot FFT[N] \cdot fctCar[N] \cdot IFFT[N]] \\ h \leftarrow [\max(S_0 e^{xJ[1]} - K, 0) \dots \max(S_0 e^{xJ[N]} - K, 0)] \\ v \leftarrow [e^{\alpha yJ[1]} \max(F[1], h[1]) \dots e^{\alpha yJ[N]} \max(F[N], h[N])] \end{cases}$ 
 $F \leftarrow e^{-r\Delta t} [e^{-\alpha xJ[1]+i uJ[1](yJ[1]-xJ[1])} (-1)^{indice[1]} \cdot FFT[1] \cdot fctCar[1] \cdot IFFT[1] \\ \dots e^{-\alpha xJ[N]+i uJ[N](yJ[1]-xJ[1])} (-1)^{indice[N]} \cdot FFT[N] \cdot fctCar[N] \cdot IFFT[N]]$ 
 $prix \leftarrow F[\frac{N}{2} + 1]$ 

```

#### 4.5 Résultats numériques

Dans cette section, on présente les résultats numériques de la méthode de convolution. Plus précisément, on analyse l'erreur de tarification (en valeur absolue) de la méthode par rapport à des valeurs de référence pour différents nombres de points sur la grille notés  $N$  ainsi que le temps de calcul nécessaire pour générer le prix. Les modèles utilisés lors des différentes analyses sont les modèles de Black-Scholes et le modèle Variance Gamma. On tarifie, dans l'ordre, une option d'achat européenne, une option de vente bermudienne ainsi qu'une option de vente américaine. Les paramètres sont donnés dans

le tableau 4.1. Les tests effectués sont très similaires à ceux effectués dans Lord *et al.* (2008).

La méthode de convolution est d'abord testée dans le cas où le seul instant possible d'exercice est à l'échéance, ce qui implique qu'on se retrouve à tarifier une option européenne. Plus précisément, on choisit de calculer le prix d'une option d'achat européenne. Cette façon de faire nous permet de comparer le résultat obtenu à celui obtenu par la méthode de Carr *et al.* (1999). Le résultat de la méthode de Carr *et al.* (1999) est en fait utilisé comme le prix de référence dans le cas du modèle Variance Gamma, en prenant un nombre de points très élevé sur la grille, c'est-à-dire  $N = 2^{20}$ . Cependant, dans le modèle de Black-Scholes, la valeur de référence sera plutôt le prix tel que donné par la formule (2.2). L'option en question est une option d'achat européenne d'échéance  $T = 0.1$  et de prix d'exercice  $K = 90$ . En entrant la commande `blsprice(100,90,0.1,0.1,0.25,0)`, on obtient que le prix est de 11.135243124194432. Autant de décimales sont conservées volontairement pour mesurer précisément l'erreur qui est très faible lorsque le nombre de points utilisés sur la grille augmente. Le tableau 4.2 présente les résultats dans le cas du modèle de Black-Scholes. On remarque que les temps de calcul sont très faibles. En effet, le temps de calcul est inférieur à un centième de seconde pour un nombre de points sur la grille de  $N = 2^{12}$ . Pour ce qui est de l'erreur, elle devient négligeable pour  $N = 2^9$ . Dans le modèle Variance Gamma, le même exercice est effectué et les résultats sont présentés dans le tableau 4.3. La valeur de référence, calculée par la méthode de Carr *et al.* (1999) avec  $N = 2^{20}$  est de 10.9937024989088532. On remarque que les résultats sont similaires à ceux du modèle de Black-Scholes, malgré que l'erreur soit plus grande, mais tout de même négligeable au fur et à mesure que  $N$  augmente.

On applique maintenant la méthode convolution pour des options de vente bermudiennes, avec une échéance de  $T = 1$ , un prix d'exercice de  $K = 110$  ainsi que  $M = 10$  instants d'exercice possibles. On présente les résultats pour les deux modèles ainsi que pour les deux grilles possibles dans les tableaux 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7. On s'attend à un temps de calcul plus long avec la grille dynamique et on cherche à vérifier si le temps supplémentaire sera compensé par une réduction de l'erreur. Cette fois, pour les deux

modèles, la valeur de référence est le prix donné par la méthode de convolution avec  $N = 2^{20}$ . On obtient un prix de référence de 11.987453515745329 dans le modèle de Black-Scholes et de 9.040646117341028 dans le modèle Variance Gamma. Pour ce qui est des temps de calcul, ceux-ci restent à des niveaux très faibles malgré une augmentation du nombre d'instants d'exercices. Pour un  $N = 2^{12}$  par exemple, l'utilisation d'une grille dynamique requiert environ le double du temps. Quant à l'erreur, elle est plus élevée avec la grille dynamique pour les deux modèles. En résumé, la grille dynamique donne des résultats moins précis et augmente le temps de calcul par rapport à la grille statique. La seule anomalie observée de la grille statique est le fait que, dans le modèle Variance Gamma, lorsque  $N$  passe de  $2^9$  à  $2^{10}$ , l'erreur augmente. Cependant, ces erreurs sont tout de même plus faibles que celles en utilisant une grille dynamique. Enfin, le seul avantage pratique d'utiliser une grille dynamique est de s'assurer que l'augmentation de  $N$  diminue forcément l'erreur.

Finalement, le tableau 4.8 nous donne les prix d'options bermudiennes dans le modèle Variance Gamma avec une échéance de  $T = 1$ , un prix d'exercice de  $K = 110$  et des instants d'exercices allant de 1 à 100000. Le cas  $M = 1$  est celui d'une option européenne et on obtient un prix beaucoup plus faible pour cette option que pour des instants d'exercice plus élevés, ce qui montre qu'il existe une prime pour le droit d'exercer prématurément l'option. L'autre cas extrême, c'est-à-dire le cas où  $M = 100000$  nous donne un prix d'environ 9.9999 et, en regardant les autres prix, le prix de l'option américaine semble converger vers cette valeur. En prenant un  $M = 1000$ , on obtient un prix d'environ 9.9900, un prix très proche du prix pour  $M = 100000$ , mais en un temps d'environ 2.54 secondes plutôt que d'environ 235.85 secondes. Pour tarifier des options ou pour calibrer un modèle à partir d'options américaines, un  $M = 1000$  semble donc être un bon compromis entre la précision obtenue et le temps de calcul requis.

**Tableau 4.1** Paramètres utilisés pour les tests numériques

Black-Scholes	$S_0 = 100$	$r = 0.1$	$\sigma = 0.25$	-	-
Variance Gamma	$S_0 = 100$	$r = 0.1$	$\sigma = 0.12$	$\theta = -0.14$	$\nu = 0.2$

**Tableau 4.2** Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option d'achat européenne dans le modèle de Black-Scholes avec une échéance de  $T = 0.1$ , un prix d'exercice  $K = 90$  et une valeur de référence de 11.135243124194432

N	temps (sec)	erreur
$2^7$	0.001380	9.0321e-02
$2^8$	0.001929	2.0570e-02
$2^9$	0.002292	5.1996e-03
$2^{10}$	0.002531	1.3033e-03
$2^{12}$	0.004533	8.1524e-05
$2^{20}$	0.414931	1.9392e-09

**Tableau 4.3** Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option d'achat européenne dans le modèle Variance Gamma avec une échéance de  $T = 0.1$ , un prix d'exercice  $K = 90$  et une valeur de référence de 10.9937024989088532

N	temps (sec)	erreur
$2^7$	0.001876	5.1310e-01
$2^8$	0.002108	1.6551e-01
$2^9$	0.002549	2.3945e-02
$2^{10}$	0.003046	2.3945e-02
$2^{12}$	0.004683	2.8146e-05
$2^{20}$	0.571485	-

**Tableau 4.4** Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle de Black-Scholes avec une grille statique, une valeur de référence de 11.987453515745329, une échéance de  $T = 1$ , un prix d'exercice de  $K = 110$  et  $M = 10$  instants d'exercice possibles

N	temps (sec)	erreur
$2^7$	0.003100	2.4803e-02
$2^8$	0.011109	9.0946e-03
$2^9$	0.013331	1.2909e-03
$2^{10}$	0.016613	1.8000e-06
$2^{12}$	0.031211	9.3083e-06
$2^{20}$	3.487994	1.4446e-09

**Tableau 4.5** Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle de Black-Scholes avec une grille dynamique, une valeur de référence de 11.987453515745329, une échéance de  $T = 1$ , un prix d'exercice de  $K = 110$  et  $M = 10$  instants d'exercice possibles

N	temps (sec)	erreur
$2^7$	0.02381	9.8776e-03
$2^8$	0.025470	5.0095e-03
$2^9$	0.029335	2.4536e-03
$2^{10}$	0.036085	1.5951e-03
$2^{12}$	0.063773	1.2127e-04
$2^{20}$	6.610610	-

**Tableau 4.6** Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle Variance Gamma, avec une grille statique, une valeur de référence de 9.040646117341028, une échéance de  $T = 1$ , un prix d'exercice de  $K = 110$  et  $M = 10$  instants d'exercice possibles

N	temps (sec)	erreur
$2^7$	0.011380	7.0345e-02
$2^8$	0.011871	5.4115e-02
$2^9$	0.015008	3.6741e-03
$2^{10}$	0.019932	1.0256e-03
$2^{12}$	0.034871	1.0987e-04
$2^{20}$	4.168435	2.8397e-09

**Tableau 4.7** Temps de calcul et erreur de la méthode de convolution pour une option de vente bermudienne dans le modèle Variance Gamma avec une grille dynamique, une valeur de référence de 9.040646117341028, une échéance de  $T = 1$ , un prix d'exercice de  $K = 110$  et  $M = 10$  instants d'exercice possibles

N	temps (sec)	erreur
$2^7$	0.025241	2.4982e-01
$2^8$	0.02704	1.8097e-02
$2^9$	0.033303	5.4134e-03
$2^{10}$	0.043642	1.1281e-03
$2^{12}$	0.078079	1.5657e-04
$2^{20}$	7.706999	-

**Tableau 4.8** Analyse de la convergence du prix avec la méthode de convolution en augmentant le nombre d'instants d'exercice pour la tarification d'une option de vente bermudienne dans le modèle Variance Gamma avec une grille statique, un nombre de points sur la grille de  $N = 2^{12}$ , une échéance de  $T = 1$  et un prix d'exercice de  $K = 110$

M	temps (sec)	prix
1	0.003633	4.961593817488169
5	0.016516	8.280096383172406
10	0.036654	9.040536244789971
20	0.060067	9.498579781009701
30	0.091619	9.661445289538417
40	0.117904	9.744337117515613
80	0.223750	9.871070438963400
100	0.270520	9.896807940389294
250	0.671963	9.959329875276286
500	1.324324	9.979883589836028
750	1.953406	9.986645835018763
1000	2.541270	9.990006888569448
10000	25.544112	9.999007102838750
100000	235.851756	9.999900776718002





## CONCLUSION

Ce projet peut servir de référence pour la tarification de divers produits dérivés dans le modèle Variance Gamma en utilisant des méthodes Monte Carlo ainsi que des méthodes faisant intervenir des FFT. Les méthodes Monte Carlo sont utiles pour leur facilité d'ajustement à un large éventail d'options. Les méthodes faisant intervenir des FFT ont montré une grande efficacité tant au niveau de la précision que de la rapidité de calcul. La possibilité de tarifier des options américaines dans des modèles de Lévy exponentiels est particulièrement intéressante. Comme avenue de recherche, il serait intéressant de développer des techniques de simulation permettant d'éliminer complètement le biais de discrétisation pour les modèles basés sur des mouvements browniens subordonnés comme le modèle Variance Gamma.



## BIBLIOGRAPHIE

- Avramidis, T. et L'Écuyer, P. (2006). Efficient Monte Carlo and quasi-Monte Carlo Option Pricing Under the Variance-Gamma Model. *Management Science*, 52(12), 1930–1944.
- Becker, M. (2010a). Comment on "Correcting for Simulation Bias in Monte Carlo Methods to Value Exotic Options in Models Driven by Lévy Processes" by C. Ribeiro and N. Webber. *Applied Mathematical Finance*, 17, 133–146.
- Becker, M. (2010b). Unbiased Monte Carlo Valuation of Lookback, Swing and Barrier Options with Continuous Monitoring Under Variance Gamma Models. *Journal of Computational Finance*, 13, 35–61.
- Black, F. et Scholes, M. S. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–54.
- Boyle, P. P. (1977). Options : A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 323–338.
- Carr, P., Madan, D. B. et Smith, R. H. (1999). Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2, 61–73.
- Cont, R. et Tankov, P. (2003). *Financial Modelling with Jump Processes* (2e éd.). CRC Financial Mathematics Series. Boca Raton, Floride : Chapman & Hall / CRC Press.
- Cooley, J. W. et Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.*, 19, 297–301.
- Gauss, C. F. (1866). Nachlass : Theoria interpolationis methodo nova tractata. In *Werke*, volume 3 265–330. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Applications of Mathematics. New York, NY : Springer.
- Glasserman, P. et Liu, Z. (2010). Sensitivity Estimates from Characteristic Functions. *Operations Research*, 58(6), 1611–1623.
- Huynh, H. T., Lai, V. S. et Soumaré, I. (2006). *Simulations stochastiques et applications en finance avec programmes Matlab*. Finance. Paris, France : Economica.
- Jaimungal, S. (2004). Pricing and Hedging Equity Indexed Annuities with Variance-Gamma Deviates. *Document de travail*, 1–37.

- Kienitz, J. (2008). A Note on Monte Carlo Greeks using the Characteristic Function. *Document de travail*.
- Kienitz, J. (2010). Monte Carlo Greeks for Advanced Financial Applications - Jump Diffusions and (Time-Changed) Lévy Processes based Models. *International Review of Applied Financial Issues and Economics*, (1), 167–192.
- Kienitz, J. et Wetterau, D. (2012). *Financial Modelling : Theory, Implementation and Practice with MATLAB Source*. The Wiley Finance Series. West Sussex, Grande-Bretagne : Wiley.
- Kou, S. G. (2002). A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, 48(8), 1086–1101.
- Kwok, Y. (2008). *Mathematical Models of Financial Derivatives* (2e éd.). Springer Finance. Berlin, Allemagne : Springer.
- Kyprianou, A., Schoutens, W. et Wilmott, P. (2005). *Exotic Option Pricing and Advanced Levy Models*. West Sussex, Grande-Bretagne : Wiley.
- Lamberton, D. et Lapeyre, B. (2012). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance* (3e éd.). Paris, France : Ellipses.
- Longstaff, F. A. et Schwartz, E. S. (2001). Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach. *Review of Financial Studies*, 14(1), 113–47.
- Lord, R., Fang, F., Bervoets, F. et Oosterlee, C. W. (2008). A Fast and Accurate FFT-Based Method for Pricing Early-Exercise Options under Lévy Processes. *SIAM J. Scientific Computing*, 30, 1678–1705.
- Madan, D. B., Peter et Chang, E. C. (1998). The Variance Gamma Process and Option Pricing. *European Finance Review*, 2, 79–105.
- Madan, D. B. et Seneta, E. (1990). The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns. *The Journal of Business*, 63(4), 511–24.
- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144.
- Ribeiro, C. et Webber, N. (2004). Valuing Path-Dependent Options in the Variance-Gamma Model by Monte Carlo with a Gamma Bridge. *The Journal of Computational Finance*, 7 (2), 81–100.
- Ribeiro, C. et Webber, N. (2006). Correcting for Simulation Bias in Monte Carlo Methods to Value Exotic Options in Models Driven by Lévy Processes. *Applied Mathematical Finance*, 13, 333–352.

- Schoutens, W. (2003). *Levy Processes in Finance : Pricing Financial Derivatives*. Volume 534 de Wiley Series in Probability and Statistics. West Sussex, Grande-Bretagne : Wiley.
- Seneta, E. (2004). Fitting the Variance-Gamma Model to Financial Data. *Journal of Applied Probability*, 41A, 177–187.
- Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous-Time Models*. Springer Finance : Textbook. New York, NY : Springer.